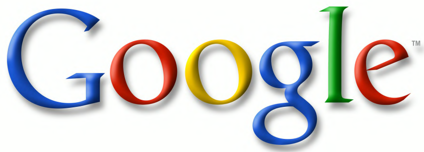






LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MÉCHANIQUE;

PAR M. L'ABBÉ JANTET,

Professeur de Philosophie au Collége royal de Dole.



A DOLE,

Chez JOLY, Imprimeur-Libraire, rue de Besançon;

Et se trouve à PARIS,

Chez BARBOU, Imprimeur-Lib., rue des Mathurins.

M. DCC. LXXXV.

AVEC APPROBATION & PRIVILEGE DU ROI.

tiques soumis à l'action libre de leur pesanteur, & celles de l'équilibre des fluides avec les corps solides qui y sont plongés. Enfin je finis par donner une légère idée de l'Hydraulique, en exposant ce qu'il y a de plus facile à comprendre sur le mouvement des fluides qui s'écoulent ou qui jaillissent par de petits ajutages, sur la percussion des fluides & sur la réfraction des corps qui passent d'un milieu dans un autre.

J'avoue avec reconnoissance avoir profité, pour composer ces Leçons, des meilleurs Ouvrages qu'on ait publiés jusqu'à présent sur la Méchanique. Les Cours de MM. *Bossut* & *Bezout* en particulier, & les différents Traités de M. *d'Alembert*, m'ont été d'une grande utilité. Je n'ai cependant pas prétendu donner un simple extrait. En choisissant dans les Ouvrages de ces grands Géomètres, ce qui pouvoit convenir à mon objet, j'ai tâché de le disposer suivant l'ordre qui m'a paru le plus avantageux à mes Elèves, & de le présenter, généralement parlant, sous une forme nouvelle. J'ai même donné un assez grand nombre de démonstrations, que je n'ai rencontrées dans aucun Livre élémentaire, & dont j'ai fait usage pour mettre plus à la portée des Commençants différentes propositions très-essentielles pour l'intelligence de la Physique.

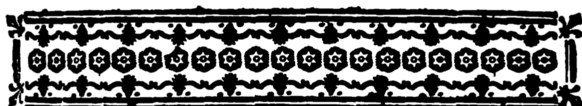


TABLE
DES TITRES
Contenus en cet Ouvrage.

SECONDE PARTIE.

De la Méchanique des Fluides.

Fin de la Table.

ERRATA.

Pag.	*Lig.*	*Fautes.*	*Corrections.*
28	12	*dune force*, lifez,	*d'une force.*
29	6	coprs, *lifez*,	corps.
58	13	digonale, *lifez*,	diagonale.
109	9	une puiffance *S*, *lifez*,	une puiffance *S'*.
132	8	ou qui étant, *lifez*,	& qui étant.
161	4	l'équation *S*, *lifez*,	l'équation *s*.
267	6	ordonné, *lifez*,	ordonnée.
283	22	proportions, *lifez*,	propofitions.

Nota. Ces deux dernières fautes ne fe font gliffées que dans quelques exemplaires.

295	5	feroit, *lifez*,	feroient.
345	17	davavantage, *lifez*,	davantage.
422	12	expimée, *lifez*,	exprimée.



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MÉCHANIQUE.

DÉFINITIONS ET NOTIONS GÉNÉRALES.

I.

LA MÉCHANIQUE, prise dans le sens le plus étendu, est une science qui a pour objet les loix de l'équilibre & du mouvement des corps.

II.

LE *mouvement* est le passage d'un corps d'un lieu en un autre, d'une partie de l'étendue ou de l'espace en une autre partie. Le mouvement peut être absolu ou relatif. Un corps a un mouvement absolu, lorsqu'il répond successivement à différentes parties contiguës de l'espace infini, pénétrable &

immobile, que nous nous représentons comme le lieu des corps. Il a un mouvement relatif, lorsqu'il vient à changer de position par rapport à d'autres corps. Supposons un homme assis dans un bateau qui soit emporté dans l'espace infini d'orient en occident : cet homme aura un mouvement absolu, mais il n'aura aucun mouvement relatif, puisqu'il sera toujours dans la même position par rapport aux différentes parties du bateau. Que l'homme dont nous parlons se promène dans le bateau en avançant vers l'occident, il aura un mouvement absolu dans l'espace, & un mouvement relatif par rapport au bateau. Enfin, que le même homme avance vers l'orient, d'une quantité égale à celle dont le bateau est emporté vers l'occident : il aura un mouvement relatif, sans avoir de mouvement absolu.

III.

L'ESPACE qu'un corps en mouvement parcourt dans un tems donné, est ce qu'on appelle la *vîtesse* de ce corps. Si deux corps en mouvement parcourent des espaces égaux dans un tems déterminé, dans une seconde, par exemple, ils ont la même vîtesse. Si dans le même tems ils parcourent des espaces inégaux, les vîtesses ne sont pas les mêmes. Celui qui parcourt un plus grand espace, a plus de vîtesse ; & celui qui parcourt un moindre espace, en a moins. La vîtesse d'un corps n'est donc grande

ou petite, que relativement à la vîteſſe d'un autre corps.

On voit de plus, que pour juger de la vîteſſe d'un corps, il faut connoître & l'eſpace parcouru & le tems employé à parcourir cet eſpace. On m'annonce qu'un homme a fait dix lieues. Cet expoſé ne ſuffit pas pour me faire connoître ſa vîteſſe; il faut encore accuſer pendant combien d'heures il a marché. De même ſi je ſavois qu'un homme a marché pendant trois heures, je ne pourrois rien décider ſur ſa vîteſſe, à moins que je ne connuſſe en même tems le chemin qu'il a fait.

I. V.

Les vîteſſes de deux corps en mouvement, comparées l'une à l'autre, ſont toujours entr'elles, comme *les eſpaces parcourus diviſés par les tems employés à les parcourir.* Pour le démontrer, ſoit un mobile A dont on ſuppoſe la vîteſſe V, & qui parcoure l'eſpace S pendant un tems T. V ſera donc l'eſpace parcouru dans un tems donné, dans une ſeconde, par exemple, & S ſera l'eſpace total parcouru pendant le nombre de ſecondes contenues dans le tems T. Or ſi l'on répète l'eſpace V autant de fois qu'il y a de ſecondes dans le tems T, c'eſt-à-dire, ſi l'on multiplie V par T, il eſt évident qu'on aura l'eſpace entier S parcouru pendant ce tems. Donc $V \times T = S$; & en diviſant par T, on aura $V = \frac{S}{T}$.

Maintenant si l'on suppose un autre mobile B dont la vîtesse soit v, & qui parcoure l'espace s pendant un nombre de secondes t, on trouvera de même $v = \frac{s}{t}$.

Donc $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Cette proportion est évidente, puisque les deux antécédents sont égaux par l'équation $V = \frac{S}{T}$, & que les conséquents sont aussi égaux par l'équation $v = \frac{s}{t}$.

V.

L'équation $VT = S$ nous apprend évidemment que l'on a l'espace parcouru, en multipliant la vîtesse par le tems. L'équation $V = \frac{S}{T}$ nous apprend de même, que l'on a la vîtesse d'un corps, en divisant l'espace par le tems. Si dans cette dernière équation on multiplie l'un & l'autre membre par la fraction $\frac{T}{V}$; on aura $T = \frac{S}{V}$. Donc on a le tems pendant lequel a duré le mouvement, en divisant l'espace parcouru par la vîtesse.

Dans la proportion $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, que nous venons de démontrer ci-dessus, on peut multiplier les deux antécédents par T, & les deux conséquens

par t, sans détruire la proportion ; & l'on aura $VT : vt :: S : s$. Ce qui fait voir que *les espaces parcourus par deux mobiles, sont en raison composée des tems & des vîtesses.*

Dans la même proportion $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, on peut multiplier les deux antécédents par la fraction $\frac{T}{V}$, & les conséquents par la fraction $\frac{t}{v}$. Alors on aura $T : t :: \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$. Donc *les tems pendant lesquels dure le mouvement, sont en raison directe des espaces & en raison inverse des vîtesses.* Car les fractions $\frac{S}{V}$, $\frac{s}{v}$ sont en raison directe de leurs numérateurs, & en raison réciproque de leurs dénominateurs.

VI.

Il est évident que l'espace ne peut contenir une quantité de nature différente, telle que le tems. Ainsi quand nous disons que *les vîtesses sont comme les espaces divisés par les tems*, cela signifie que les vîtesses sont comme les nombres concrets ou abstraits qui expriment les mesures des espaces, divisés par les nombres abstraits qui expriment les mesures des tems. Que le globe A parcoure 20 toises en 4 secondes, & le globe B 16 toises en 2 secondes : la vîtesse du premier sera à la vîtesse du

ſecond, comme 5 toiſes ſont à 8 toiſes, ou ſimplement comme 5 à 8.

Au reſte, pour avoir le rapport des vîteſſes, les eſpaces doivent être évalués en meſures de même eſpèce, comme en toiſes, pieds, pouces, &c; & ſemblablement, il faut réduire les tems en meſures de même genre, comme en heures, minutes, ſecondes, &c.

VII.

On diſtingue dans un corps la *maſſe*, le *volume* & la *denſité*. La *maſſe* eſt la ſomme des parties matérielles dont le corps eſt compoſé. Le *volume* eſt l'eſpace apparent qu'il occupe, ou, ce qui revient au même, c'eſt le nombre de pieds, de pouces cubiques, &c. qu'il paroît occuper. La *denſité* eſt la quantité de matière qu'il contient ſous un volume donné, par exemple, ſous un pied ou pouce cubique.

D'après ces définitions, il eſt aiſé de conclure que *les denſités de deux corps ſont comme les maſſes diviſées par les volumes*. Car ſoient deux corps *A* & *B* dont les maſſes, volumes & denſités ſoient reſpectivement *M*, *V*, *D*; *m*, *v*, *d*. Puiſque *D* n'eſt autre choſe que la quantité de matière contenue ſous l'unité de volume, ſous un pouce cubique, par exemple, il eſt évident qu'en répétant cette quantité de matière autant de fois qu'il y a de pouces cubiques dans le corps, on aura la maſſe totale;

Donc cette masse M est égale à la densité D multipliée par le volume V, qui marque le nombre de pouces cubiques occupés par le corps. Ainsi on a l'équation $DV = M$. On trouve de même pour le corps B, $dv = m$; ce qui donne la proportion $DV : dv :: M : m$; & divisant les antécédents par V & les conséquents par v, on a la proportion qu'il falloit démontrer, $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$.

VIII.

On voit donc que *les densités de deux corps sont en raison directe des masses & en raison inverse des volumes*. La proportion $DV : dv :: M : m$, fait voir de plus, que *les masses de deux corps sont en raison composée des densités & des volumes*. Si on divise dans cette proportion les antécédents par D & les conséquents par d, on aura $V : v :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$; ce qui nous apprend encore, que *les volumes de deux corps sont en raison directe des masses & en raison réciproque des densités*. Enfin de ces trois choses, la masse, le volume & la densité d'un corps, deux étant connues, on a toujours la troisième par l'équation $DV = M$.

On comprend assez que dans la comparaison qu'on fait des densités de deux corps, les volumes doivent être exprimés en mesures de même espèce.

I X.

ON appelle *force* ou *puiſſance* en méchanique, tout ce qui peut changer l'état d'un corps, ſoit pour le faire paſſer du repos au mouvement, ou réciproquement du mouvement au repos, ſoit enfin pour faire varier ce mouvement d'une manière quelconque

X.

ON entend par *ſyſtême de corps*, l'aſſemblage de plusieurs corps liés enſemble par des fils, par des verges ou de toute autre manière, & aſſujettis par là à ne former qu'un même tout, dont aucune partie ne peut éprouver d'action ſans que les autres n'en éprouvent auſſi. Et ſemblablement on appelle *ſyſtême de forces*, l'aſſemblage de pluſieurs forces qui agiſſent à la fois ſur un corps ou ſur un ſyſtême de corps, ſoit en s'aidant, ſoit en ſe combattant.

X I.

L'équilibre eſt l'état d'un corps ou d'un ſyſtême de corps ſollicité au mouvement par des forces qui ſe détruiſent mutuellement, ou dont l'effet eſt détruit par des obſtacles inſurmontables. L'état d'équilibre ſuppoſe donc des puiſſances qui agiſſent ſur un corps, & dont les efforts ſoient anéantis.

XII.

LE *repos* eſt l'état d'un corps ou d'un ſyſtême de corps, dont toutes les parties demeurent dans la même place, ſans qu'aucune ſoit ſollicitée au mouvement.

Les corps dont on conſidère le mouvement & l'équilibre étant ou *ſolides* ou *fluides*, on peut diviſer aſſez naturellement la Méchanique en deux parties, dont l'une ait pour objet les ſolides & l'autre les fluides.



PREMIÈRE PARTIE.

DE LA MÉCHANIQUE DES SOLIDES.

LA Méchanique des solides comprend la *Statique*, dont l'équilibre est l'objet; & la *Dynamique*, dont l'objet sont les propriétés du mouvement. Ces parties sont fondées l'une & l'autre sur trois faits, qu'on a nommés les principes de la force d'inertie, de l'équilibre, & du mouvement composé. Nous commencerons par exposer ces principes; nous traiterons ensuite de la *Statique* & de la *Dynamique*.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes qui servent de fondement à la Méchanique.

XIII.

PREMIER PRINCIPE FONDAMENTAL. *Tout corps persistera dans son état, soit de repos, soit de*

mouvement, à moins qu'une cause étrangère ne l'en fasse changer.

1° Il est évident que si un corps est en repos, il y persistera, à moins qu'une cause étrangère ne l'en tire. Car un corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plutôt que d'un autre.

De-là il s'ensuit que si un corps reçoit du mouvement par quelque cause que ce puisse être, il ne pourra de lui-même accélérer ou retarder ce mouvement.

2° Un corps mis une fois en mouvement par une cause quelconque, doit y persister toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas sur lui; c'est-à-dire, qu'à moins qu'une cause étrangère & différente de la cause motrice n'agisse sur ce corps, il se mouvra perpétuellement en ligne droite & parcourra en tems égaux des espaces égaux.

Car ou l'action indivisible & instantanée de la cause motrice au commencement du mouvement, suffit pour faire parcourir au corps un certain espace, ou le corps a besoin pour se mouvoir, de l'action continuée de la cause motrice.

Dans le premier cas, il est visible que l'espace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite

uniformément par le corps mu. Car par la ſuppoſition, paſſé le premier inſtant, l'action de la cauſe motrice n'exiſte plus, & le mouvement néanmoins ſubſiſte encore: il ſera donc néceſſairement uniforme, puiſqu'un corps ne peut accélérer ni retarder ſon mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raiſon pour que le corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche; donc dans ce premier cas, où l'on ſuppoſe qu'il ſoit capable de ſe mouvoir de lui-même pendant un certain tems indépendamment de la cauſe motrice, il ſe mouvra de lui-même uniformément & en ligne droite.

Or un corps qui peut ſe mouvoir de lui-même uniformément & en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à ſe mouvoir de la même manière, ſi rien ne l'en empêche. Car ſuppoſons que ce corps ait parcouru uniformément un certain eſpace, par exemple, trois pouces; à la fin du troiſième pouce il ſe trouve préciſément dans le même état, qu'à la fin du ſecond, ſi ce n'eſt qu'il ſe trouve dans un autre lieu: donc il doit arriver au corps la même choſe que quand il étoit à la fin du ſecond pouce. Or à la fin du ſecond pouce il lui eſt arrivé de parcourir de lui-même & uniformément le troiſième: donc à la fin du troiſième il devra parcourir uniformément le quatrième, & ainſi de ſuite.

Donc ſi l'action première & inſtantanée de la

cause motrice est capable de mouvoir le corps, il sera mu uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause ne l'en empêchera pas.

Dans le second cas, puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangère & différente de la cause motrice n'agit sur le corps, rien ne détermine donc la cause motrice à augmenter ni à diminuer; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme & constante, & qu'ainsi pendant le tems qu'elle agira, le corps se mouvra en ligne droite & uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment & uniformément pendant un certain tems, subsistant toujours tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, & produire constamment le même effet.

Donc en général un corps mis en mouvement par quelque cause que ce soit, y persistera toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui.

Le principe de la force d'inertie est d'ailleurs un fait qui peut se prouver par l'expérience. Nous voyons 1° *que les corps en repos y demeurent tant que rien ne les en tire;* & si quelquefois il arrive qu'un corps soit mu sans que nous connoissions la cause qui le meut, nous sommes en droit de juger & par l'analogie & par l'uniformité des loix de la nature, que cette cause, quoique non

apparente, n'en est pas moins réelle. 2° Quoiqu'il n'y ait point de corps qui conserve éternellement son mouvement, parce qu'il y a toujours des causes qui le ralentissent peu à peu, comme le frottement & la résistance de l'air; cependant nous voyons qu'un corps en mouvement y persiste d'autant plus long-tems, que les causes qui retardent ce mouvement sont moindres: d'où nous pouvons conclure que *le mouvement ne finiroit point, si les causes rétardatrices étoient nulles.*

La ligne droite qu'un corps décrit ou tend à décrire est nommée *sa direction.*

XIV.

SECOND PRINCIPE FONDAMENTAL. *Si deux forces* P & Q (Fig. 1.) *dont les directions font un angle droit, agissent à la fois sur un corps ou point* A; *que la force* P *soit telle que par son action sur le mobile, elle puisse seule lui faire parcourir uniformément* A B *dans un tems déterminé, comme d'une seconde, & la force* Q *telle qu'elle puisse seule lui faire parcourir* AC; *je dis que par l'action composée de ces deux forces, le mobile décrira uniformément & dans le même tems la diagonale* AD *du parallélogramme qui a pour côtés ces mêmes lignes* AB, AC.

1° Il est évident que la ligne que décrira le mobile, sera dans le plan des lignes *AB*, *AC*;

puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre.

2° Si la puissance *Q* agissoit seule sur le mobile *A*, son action l'éloigneroit de la ligne *AB*, d'une quantité *AC*, pendant une seconde; c'est ce qu'on suppose. Or l'action simultanée de la puissance *P* ne peut pas empêcher que le mobile en vertu de la force *Q* ne s'éloigne de *AB* d'une quantité *AC*. Car la direction de la puissance *P* étant perpendiculaire sur *EAC*, direction de la puissance *Q*, elle ne penche ni vers *C* ni vers *E*, & il n'y a point de raison pourquoi elle porte le mobile vers l'un ou l'autre de ces points. Donc si par le point *C* on tire *CD*, parallèle à la ligne *AB*, le mobile à la fin de la seconde sera nécessairement sur quelque point de cette ligne *CD*, qui dans toute son étendue est éloignée de *AB* d'une quantité égale à *AC*.

On démontrera par un raisonnement semblable, que l'action de la puissance *Q* ne peut empêcher le mobile de s'écarter de *AC* d'une quantité *AB*, en vertu de la puissance *P*; donc si par le point *B* on tire *BD* parallèle à la ligne *AC*, le mobile au bout d'une seconde se trouvera sur quelque point de *BD*. Mais il n'y a que le point *D*, qui soit tout à la fois sur *CD* & sur *BD*; donc le mobile au bout d'une seconde, sera en *D*.

3° Le mobile se mouvant de *A* en *D* ne s'écar-

tera pas de la diagonale AD, & son mouvement sera uniforme. Car si nous appelons T une seconde, t le tems qu'il employeroit à venir de A en c en vertu de la seule force Q, ou de A en b en vertu de la seule force P, & que nous achevions le parallélogramme $Abdc$, il est évident par ce que nous venons de démontrer, que le mobile doit, à la fin du tems t, se trouver à l'extrémité d de la diagonale Ad. Or puisque les forces Q & P, séparément prises, font mouvoir le mobile uniformément, les espaces parcourus en conséquence de leurs actions pendant un tems double, triple, quadruple, &c., seront doubles, triples, quadruples, &c., c'est-à-dire, que ces espaces seront comme les tems employés à les parcourir. Nous aurons, donc la suite des raisons égales, $T : t :: AC : Ac :: AB : Ab$, ou $T : t :: AC : Ac :: CD : cd$, parce que les côtés opposés de parallélogramme sont égaux. Mais on démontre en géométrie qu'on ne peut pas avoir la proportion $AC : Ac :: CD : cd$, à moins que le point d ne soit sur la ligne droite qui joint les points A & D. Donc le mobile ne peut pas s'écarter de la diagonale.

De plus les triangles semblables ACD, Acd, donnent $AD : Ad :: AC : Ac :: T : t$; donc les espaces que le mobile décrit en suivant la diagonale, sont comme les tems employés à les décrire; donc il se meut uniformément.

X V.

X V.

COROLLAIRE I. Puiſque les deux forces *P* & *Q* agiſſant conjointement ſur le mobile, n'ont d'autre effet que de lui faire parcourir la diagonale *AD*, il s'enſuit qu'à deux forces dont les directions font un angle droit, on peut toujours en ſubſtituer une ſeule, pourvu que celle-ci puiſſe faire parcourir au mobile la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés ſeroient décrits dans le même tems, chacun ſéparément, par l'action de la force dont il eſt la direction. Et l'on pourra pareillement conſidérer une force unique capable de faire parcourir une ligne *AD*, comme le réſultat de deux autres forces *P* & *Q* dont les directions feroient entr'elles un angle droit, & qui ſeroient capables de faire parcourir ſéparément les côtés *AB*, *AC* d'un parallélogramme dont *AD* eſt la diagonale. Par conſéquent on pourra toujours à la force capable de faire décrire *AD*, en ſubſtituer deux autres qui ſoient capables, l'une de faire décrire *AB* & l'autre *AC*.

Souvent pour abréger l'expreſſion, on appelle les forces par les noms des lignes qu'elles ſont capables de faire parcourir. On dira donc *la force* AB, *la force* AC, &c., pour exprimer les forces capables de faire décrire dans un certain tems les lignes *AB*, *AC*, &c.

Obſervons encore qu'on appelle force *réſultante* ou *compoſée*, celle qui eſt capable de produire ſeule dans un corps le même effet, que produiroient pluſieurs autres forces agiſſantes conjointement ſur le même corps; & l'on donne à celles-ci le nom de forces *compoſantes*. Ainſi la force *AD*, capable de faire parcourir la diagonale du parallélogramme rectangle *ABDC*, eſt la réſultante ou la force compoſée des puiſſances *AB*, *AC*; & ces puiſſances ſont les forces compoſantes de la puiſſance *AD*.

XVI.

COROLLAIRE II. *Si un mobile* A (Fig. 2.) *eſt ſollicité en même tems par deux forces ſuivant la même direction, & qu'elles ſoient capables de lui faire parcourir ſéparément l'une la ligne* AI, *l'autre la ligne* AL, *ce mobile, en vertu de leur action compoſée, décrira la ligne* AD, *égale à la ſomme de* AI *& de* AL.

En effet, on ne peut pas avoir $AD = AI + AL$, qu'on ne ſuppoſe $AL = ID$: Par les points *I*, *L*, menons les lignes *IB*, *LC*, perpendiculaires à la diagonale, & moyennes proportionnelles entre *AL* & *LD*, & joignons les points *A*, *C*, *D*, *B*, par des lignes qui formeront un parallélogramme rectangle, dont *AD* ſera diagonale. Achevons de plus les parallélogrammes rectangles *AIBH*, *ALCG*,

en tirant les lignes BH, CG, parallèles, & la ligne HAG, perpendiculaire à la diagonale.

Cela posé, le mobile sollicité par les deux forces AI, AL, est dans le même cas que s'il étoit sollicité par les quatre forces AI, AL, AH, AG, puisque les deux dernières de ces forces étant égales & diamétralement opposées, ne peuvent avoir aucun effet. Or le mobile sollicité par les quatre forces AI, AL, AH, AG, est dans le même cas que s'il n'étoit soumis qu'à l'action de deux forces AB, AC; puisque AB (*Num.* XV.) est la résultante des forces AI, AH, & que AC est la résultante des forces AL, AG. Donc le mobile en vertu des forces AI, AL, sera mû de la même manière qu'en vertu des forces AB, AC; donc il décrira exactement la diagonale $AD = AI + AL$.

On voit donc que la résultante de deux forces qui agissent à la fois suivant la même ligne & dans le même sens, est égale à la *somme* de ces forces. Comparant cette résultante avec une troisième force semblablement dirigée, on trouvera de même, que l'espace parcouru en vertu de l'action composée, sera la *somme* des espaces que feroient parcourir les forces séparément prises, & l'on démontrera la même chose pour tant de puissances qu'on voudra.

XVII.

Corollaire III. *Un mobile* A (Fig. 3.)

sollicité par deux forces diamétralement opposées, & capables de lui faire parcourir séparément, dans un tems donné, les espaces AD, AL, *ne parcourra dans le même tems, en vertu de leur action composée, que l'espace* AI = AD — AL.

Car la force capable de faire parcourir *AD*, produit le même effet que deux forces dont l'une feroit parcourir *AI*, & l'autre *ID* = *AL*. Or la force capable de faire parcourir *ID*, est détruite par la force capable de faire parcourir *AL*, puisqu'on suppose ces forces égales & diamétralement opposées ; donc le mobile est dans le même état, que s'il n'étoit sollicité que par une force capable de lui faire parcourir *AI*, dans le tems donné.

XVIII.

Corollaire IV. *Soit que les directions des deux forces* P & Q *qui agissent en même tems sur un mobile* A, *fassent un angle aigu* (Fig. 4.) ; *ou un angle obtus* (Fig. 5.), *ce mobile décrira la diagonale du parallélogramme* ABDC, *dont les côtés marquent sur les directions de ces forces les effets dont elles sont capables séparément : & il décrira cette diagonale dans le même tems que, par l'action de l'une quelconque de ces deux forces, il eût décrit le côté qui représente cette dernière force.*

En effet, concevons que par le point *A* on mène

la ligne *HAG* perpendiculaire à la diagonale *AD*, & que par les points *C* & *B* on mène les lignes *CG*, *BH* parallèles, & les lignes *CL*, *BI* perpendiculaires à la même diagonale. Au lieu de la force *P*, repréſentée par *AB* diagonale du parallélogramme rectangle *AHBI*, on peut (*Num.* XV.) prendre les deux forces *AH* & *AI*. Par la même raiſon, au lieu de la puiſſance *Q* repréſentée par la diagonale *AC* du parallélogramme rectangle *AGCL*, on peut prendre les deux forces *AG*, *AL*. On peut donc aux deux forces *P* & *Q*, ſubſtituer les quatre forces *AH*, *AI*, *AG*, *AL*; & celles-ci ne peuvent manquer d'avoir la même réſultante que ces deux-là. Or de ces quatre forces, les deux *AH*, *AG* ne contribuent en rien à la réſultante, puiſqu'elles agiſſent ſuivant des directions oppoſées, & qu'elles ſont égales. Pour reconnoître leur égalité, conſidérons les triangles *BDI*, *CAL*: le côté *BD* de l'un eſt égal au côté *AC* de l'autre, parce qu'ils ſont des côtés oppoſés de parallélogramme: les angles en *I* & en *L* ſont droits, & les angles *CAL*, *BDI* ſont égaux, parce qu'ils ſont alternes-internes (*Fig.* 4.) & alternes-externes (*Fig.* 5.); donc les troiſiémes angles *ACL*, *DBI*, ſont néceſſairement égaux, ainſi que les côtés homologues des deux triangles. Nous avons donc $AL = DI$, & $CL = BI$. Donc auſſi $AG = AH$.

Quant aux deux forces AI, AL, comme elles sont dirigées suivant une même ligne, l'effet qui en résulte doit être la somme $AI+AL$ des deux effets (*Fig.* 4.), parce que ces forces agissent dans le même sens ; & doit être la différence $AI-AL$ (*Fig.* 5.), parce qu'elles agissent en sens contraires. Or dans la *Fig.* 4, $AI+AL=AI+DI=AD$, puisque nous venons de démontrer que $AL=DI$; & par la même raison (*Fig.* 5.) $AI-AL=AI-DI=AD$. Donc les deux forces P & Q, capables de faire parcourir les côtés d'un parallélogramme, ont dans tous les cas pour résultante, la force AD, qui feroit parcourir la diagonale.

XIX.

COROLLAIRE V. *Deux puissances composantes & leur résultante, sont entr'elles chacune comme le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

Soient, par exemple, (*Fig.* 6.), les deux puissances composantes P, Q, & leur résultante R. Je dis qu'on aura P : sin. QAR :: Q : sin. PAR :: R : sin. QAP.

Car, (*Num.* XVIII.), $P : AB :: Q : AC :: R : AD$; ou parce que $AC=BD$, on a $P : AB :: Q : BD :: R : AD$. Or dans le triangle ABD, les côtés AB, BD, AD sont proportionnels aux sinus des angles opposés ADB,

BAD, *ABD*: ainſi dans la ſuite précédente de raiſons égales, on peut ſubſtituer les ſinus de ces angles à la place de leurs côtés oppoſés; & l'on aura *P* : ſin. *ADB* :: *Q* : ſin. *BAD* :: *R* : ſin. *ABD*. Mais ſin. *ADB* = ſin. *QAR*, puiſque ces angles ſont alternes-internes entre parallèles: de même ſin. *ABD* = ſin. *QAP*, puiſque les ſinus des angles qui ſont ſupplément l'un de l'autre, ſont égaux. Donc on a *P* : ſin. *QAR* :: *Q* : ſin. *PAR* :: *R* : ſin. *QAP*.

X X.

Troisième Principe fondamental. *Si deux corps dont les vîteſſes ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, ont des directions oppoſées, de telle manière que l'un ne puiſſe ſe mouvoir ſans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.*

1° Si les deux corps ſont égaux & leurs vîteſſes égales, il eſt évident qu'ils reſteront tous deux en repos. Car alors tout étant égal de part & d'autre, il n'y a point de raiſon pourquoi l'un de ces corps l'emporte ſur l'autre.

2° Si la maſſe du premier eſt double, triple, quadruple, &c., de la maſſe du ſecond, & que la vîteſſe de celui-ci ſoit double, triple, quadruple, &c., de la vîteſſe du premier, il y aura pareillement équilibre entr'eux. Que la maſſe du premier ſoit, par exemple, 5 *m* & ſa vîteſſe *v*, tandis que la

maſſe du ſecond ſera *m* & ſa vîteſſe 5 *v*. Il eſt évident qu'on peut regarder la maſſe 5 *m* du premier comme compoſée de 5 maſſes *m*, qui auroient chacune la vîteſſe *v*, & qu'en nommant *F* la force employée pour mouvoir chacune de ces maſſes avec la vîteſſe *v*, la force néceſſaire pour mouvoir la maſſe entière avec la même vîteſſe, ſera 5 *F*. Pareillement, *F* étant la force qui donneroit la vîteſſe *v* à la ſeconde maſſe *m*, il faudroit (*Num.* XVI.) une force exprimée par 5 *F*, pour lui donner une vîteſſe 5 *v*. Donc les deux mobiles dans le cas propoſé ſeront animés de forces égales, qui ayant des directions oppoſées, ſe détruiront.

On voit qu'on peut employer un ſemblable raiſonnement, pour démontrer qu'il y aura équilibre dans tout autre cas où la maſſe du premier corps ſera multiple de celle du ſecond, les vîteſſes étant réciproquement proportionnelles aux maſſes.

Au reſte, pour que la démonſtration ne ſouffre aucune difficulté, on peut ſuppoſer que les deux corps ſont des parallélipipèdes rectangles, de baſes égales & ſemblables, & de différente longueur, (*Fig.* 7.), qui ſe choquent par leurs baſes. Nous verrons ailleurs que le principe eſt généralement vrai, quelle que ſoit la figure des corps.

3° Si l'une des maſſes n'eſt pas multiple de l'autre, mais que ces maſſes ſoient entr'elles dans le rapport de tels nombres qu'on voudra, il y aura toujours

équilibre, pourvu qu'elles ſoient en raiſon inverſe des vîteſſes. On peut le démontrer pour tous les cas, comme nous allons le démontrer pour le ſuivant. Suppoſons que la maſſe du premier corps ſoit $3m$ & ſa vîteſſe $8v$; que la maſſe du ſecond ſoit $4m$ & ſa vîteſſe $6v$. Il eſt clair que la force qui anime l'un & l'autre de ces corps, eſt égale à celle qui animeroit un autre corps dont la maſſe ſeroit m & la vîteſſe $24v$. Car la maſſe $3m$ étant triple de la maſſe m, la vîteſſe $24v$ eſt triple de la vîteſſe $8v$; & de même la maſſe $4m$ étant quadruple de m, $24v$ eſt auſſi quadruple de $6v$. Donc les forces qui animent les deux corps propoſés, ſeront égales à une troiſième force, & par conſéquent égales entr'elles; & puiſqu'elles ſont diamétralement oppoſées, elles ſe détruiront. Donc les deux corps seront en équilibre.

X X I.

COROLLAIRE I. On appelle *quantité de mouvement* d'un corps, le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe. Or les vîteſſes de deux corps ne peuvent pas être en raiſon inverſe des maſſes, que les produits des maſſes par les vîteſſes ne ſoient égaux, & qu'il n'y ait par conſéquent égalité entre les quantités de mouvement des deux corps. *Donc il y a équilibre, lorſque deux corps agiſſent en ſens contraires & qu'ils ont des quantités égales de mouvement.*

XXII.

Corollaire II. Nous ne pouvons juger des forces qui agiſſent ſur les corps, que par les effets qu'elles produiſent: & dans le fond, pour déterminer les loix de l'équilibre & du mouvement, il ſuffit d'eſtimer les raports des forces par ceux de leurs effets, comme on le verra dans la ſuite de cet ouvrage. Or le troiſième principe fondamental que nous venons de démontrer, nous donne le moyen de repréſenter ainſi les forces par leurs effets, & d'en avoir une juſte meſure. Car ou les corps dont on veut comparer les forces, ont la même vîteſſe, ou leurs vîteſſes ſont différentes.

Dans le premier cas, il eſt évident que l'effet produit dans l'un & l'autre corps, n'eſt autre choſe que la vîteſſe communiquée à tous les points de la maſſe, ou répétée autant de fois qu'il y a de points dans la maſſe; ou, ce qui eſt encore la même choſe, le produit de la vîteſſe par la maſſe, produit qui conſtitue la quantité de mouvement. En meſurant donc par leurs effets les forces de deux corps mus avec la même vîteſſe, nous aurons la proportion ſuivante: *la force du premier corps eſt à la force du ſecond, comme la quantité de mouvement du premier eſt à la quantité de mouvement du ſecond.*

Dans le ſecond cas, où l'on ſuppoſe que les

esses des deux mobiles sont différentes, on trouvera encore que *les effets qui représentent les forces, sont comme les quantités de mouvement.* En effet, soient M & V la masse & la vîtesse du premier corps A; m & v la masse & la vîtesse du du second B. Si nous supposions un troisième corps C dont la vîtesse fût V & dont la masse fût $\frac{mv}{V}$, sa force seroit égale à celle du corps B, puisque les masses de B & de C seroient en raison inverse des vîtesses. Or la force du corps A & celle du corps C, seroient entr'elles comme les quantités de mouvement dont ces corps sont animés, puisqu'ils auroient l'un & l'autre même vîtesse; c'est-à-dire, que la force de A seroit à la force de C, comme MV est à $\frac{mv}{V} \times V$, ou comme MV est à mv. Donc aussi la force de A seroit à la force de B, comme MV est à mv, ou *comme la quantité de mouvement du premier est à la quantité de mouvement du second.*

XXIII.

REMARQUE. On distingue deux sortes de forces, savoir *les forces vives* ou *motrices*, qui produisent un mouvement réel & actuel; & *les forces mortes* ou *de pression*, qui tendent seulement à imprimer du mouvement, & qui n'en produisent

pas, parce que leur effet eſt détruit par la réſiſtance de quelque obſtacle, ou par d'autres forces oppoſées. Les vîteſſes qui réſultent des premières, s'appellent vîteſſes *réelles*; les vîteſſes que les ſecondes tendent à produire, s'appellent vîteſſes *virtuelles*. Un boulet ſortant de la bouche du canon, eſt animé d'une force vive : l'effort qu'exerce à chaque inſtant un globe ſoutenu par une table qui l'empêche de deſcendre, eſt une force morte. On voit (*Num.* XXII.) qu'*on peut avoir l'expreſſion d'une force vive, en multipliant la maſſe du corps par ſa vîteſſe réelle, & l'expreſſion dune force morte, en multipliant pareillement la maſſe du corps par ſa vîteſſe virtuelle.*



CHAPITRE II.

ÉLÉMENS DE STATIQUE.

LA Statique a pour objet l'équilibre des corps. Nous déterminerons d'abord qu'elle doit être la valeur, la position & direction de plusieurs puissances qui agissent sur un coprs, pour que leurs efforts se détruisent. Cette partie comprendra les loix générales de l'équilibre. Nous déduirons ensuite de ces loix les propriétés du centre de gravité des corps, & les conditions d'équilibre dans les différentes machines dont on fait usage en Méchanique.

ARTICLE PREMIER.

Des Loix générales de l'Équilibre.

NOUS avons déjà vu que *si un corps est sollicité en sens diamétralement opposés par des forces égales, il sera nécessairement en équilibre.* C'est de ce principe très-simple & très-évident que nous allons déduire les loix de l'équilibre.

XXIV.

ON appelle *moment* d'une puissance, le produit de cette puissance par la distance de sa direction à

un *point*, à une *ligne*, à un *plan*. Ainsi dans la *Fig. 6*, en supposant que EF marque la distance du point E à la direction AB, le produit $P \times EF$ sera le moment de la puissance P relativement au point E. Les points, lignes, plans par rapport auxquels on considère les moments, s'appellent *centres de moments*, *axes de moments*, *plans de moments*.

XXV.

THÉORÈME. *Le moment de la résultante de deux puissances par rapport à un point pris dans le plan de ces puissances, est égal à la somme ou à la différence de leurs moments, suivant qu'elles tendent à faire tourner autour de ce point dans le même sens ou dans des sens opposés.*

Soient deux puissances composantes P & Q (*Fig.* 8, 9, 10.) représentées par les lignes AB, AC, dont la résultante R soit exprimée par la diagonale AD. On peut supposer le centre E des moments ou dans l'angle formé par les directions de ces puissances (*Fig.* 9.), ou dans l'angle formé par leurs directions prolongées (*Fig.* 10.), ou enfin supposer que le centre des moments soit pris hors de ces angles (*Fig.* 8.). On voit que dans les deux premiers cas, les puissances tendent à faire tourner autour du point E en sens opposés, & que dans le dernier elles tendent l'une & l'autre à faire tourner dans le même sens.

Pour démontrer le théorème, menons du point E les lignes EA, EB, ED aux sommets des angles A, B, D, & les lignes EF, EH, EG, perpendiculaires sur les directions AB, AC, AD des puissances composantes & de la résultante. La ligne IH perpendiculaire comprise entre les côtés AC & BD du parallélogramme, marquera la hauteur du triangle ADC, en prenant AC pour base de ce triangle: car elle sera égale à la ligne DL abaissée perpendiculairement du sommet D sur AC: & puisque la surface d'un triangle est égale au demi-produit de la base par la hauteur, nous aurons dans les trois figures, $EAD = \frac{AD \times EG}{2}$, $EAB = \frac{AB \times EF}{2}$, $ABD = ACD = \frac{AC \times IH}{2}$, $EBD = \frac{BD \times EI}{2} = \frac{AC \times EI}{2}$, parce que $AC = BD$ par la nature du parallélogramme.

Cela posé, nous aurons 1° (*Fig.* 8), $EAD = EAB + EBD + ABD$, c'est-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EI}{2} + \frac{AC \times IH}{2}$. Doublant tous les termes, & observant que $AC \times EI + AC \times IH = AC \times EH$, l'équation deviendra $AD \times EG = AB \times EF + AC \times EH$. Enfin substituant les puissances R, P, Q, au lieu des lignes AD, AB, AC, qui les représentent,

on aura $R \times EG = P \times EF + Q \times EH$. Donc ſi le centre des moments n'eſt pas compris dans l'angle formé par les directions des puiſſances, ni dans ſon oppoſé au ſommet, le moment de la réſultante eſt égal à la ſomme des moments des puiſſances compoſantes.

2° Nous aurons dans la *Fig.* 9, $EAD = ABD - EBD - EAB$; c'eſt-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AC \times IH}{2} - \frac{AC \times EI}{2} - \frac{AB \times EF}{2}$. Multipliant par 2 l'un & l'autre membre, & obſervant que $AC \times IH - AC \times EI = AC \times EH$, on voit que l'équation devient $AD \times EG = AC \times EH - AB \times EF$, ou $R \times EG = Q \times EH - P \times EF$; en mettant au lieu des lignes AD, AB, AC, les forces qu'elles repréſentent.

3° On peut faire un ſemblable raiſonnement pour la *Fig.* 10. Car dans cette figure, $EAD = EBD - ABD - EAB$; c'eſt-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AC \times EI}{2} - \frac{AC \times IH}{2} - \frac{AB \times EF}{2}$. Donc puiſque $AC \times EI - AC \times IH = AC \times EH$, nous aurons $AD \times EG = AC \times EH - AB \times EF$, ou $R \times EG = Q \times EH - P \times EF$.

On voit donc en général, que ſi les deux puiſſances compoſantes tendent à faire tourner dans le

même

même ſens autour du point E, le moment de leur réſultante eſt égal à la ſomme des moments de ces puiſſances; & que ſi les deux puiſſances compoſantes tendent à faire tourner en ſens contraires, le moment de la réſultante vaut la différence des moments de ces puiſſances.

Nous venons de trouver qu'en prenant le centre E des moments entre les directions de la réſultante & de la puiſſance P, le moment de la réſultante étoit égal au moment de la puiſſance Q, moins le moment de la puiſſance P. Si l'on prenoit le point E entre les directions de la réſultante & de la puiſſance Q, on trouveroit pareillement que le moment de la réſultante vaudroit le moment de la puiſſance P, moins le moment de la puiſſance Q.

XXVI.

CorOLLAIRE I. *Les moments de la réſultante & de l'une des puiſſances compoſantes, conſidérés par rapport à un point pris ſur la direction de l'autre puiſſance compoſante, ſont égaux.*

Car la perpendiculaire EF (*Fig.* 8.) eſt d'autant moindre, qu'on ſuppoſe le point E plus près de la direction AB; & cette perpendiculaire devient zéro, quand on ſuppoſe le point E ſur cette direction (*Fig.* 11.). Donc alors dans l'équation $R \times EG = P \times EF + Q \times EH$, la quantité $P \times EF$ devient nulle, & l'on a $R \times EG = Q \times EH$.

On tire de cette équation l'analogie $R : Q :: EH : EG$, qui fait voir que *la résultante & l'une des puissances composantes, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point pris sur la direction de l'autre puissance composante.*

XXVII.

COROLLAIRE II. *Les moments des deux puissances composantes, par rapport à un point pris sur la direction de leur résultante, sont égaux.*

Car plus on suppose le point E (*Fig.* 9) près de la direction AD, moindre est la perpendiculaire EG; & cette perpendiculaire devient zéro, si on prend le point E sur la ligne AD (*Fig.* 12). Donc alors le moment de la résultante est zéro; & comme il est égal à la différence des moments des puissances composantes, cette différence est nulle. Donc ces moments sont égaux, & l'on a $P \times EF = Q \times EH$.

Cette équation donne l'analogie $P : Q :: EH : EF$; ce qui démontre que *les deux puissances composantes sont en raison inverse des perpendiculaires menées sur leurs directions, d'un point pris dans la direction de la résultante.*

XXVIII.

COROLLAIRE III. Concevons que les directions des deux puissances composantes P, Q (*Fig.* 13

& 14) passent constamment par deux points M, N, & que leur point de concours A s'éloigne de plus en plus, suivant la direction prolongée AK de la résultante.

1° Il est évident que plus le point A s'éloignera, plus les directions des puissances composantes approcheront du parallélisme, de manière que si le point A s'éloignoit jusqu'à l'infini, ces directions deviendroient parallèles. Les forces P & Q (*Fig.* 13.) deviendroient donc des forces parallèles dirigées dans le même sens, comme on les voit dans la *Fig.* 15; & les forces P & Q (*Fig.* 14) deviendroient des forces parallèles, dirigées en sens opposés, comme elles sont représentées dans la *Fig.* 16.

2° Le théorème & les corollaires précédents pourront s'appliquer à ces forces, quel que soit l'éloignement où l'on suppose le point A. Donc si l'on suppose ce point infiniment éloigné, & les forces P, Q, R, parallèles (*Fig.* 15 & 16), après avoir tiré des points E, E', E'', E''', des perpendiculaires sur leurs directions, on aura les équations suivantes :

$$R \times E'G' = P \times E'F' + Q \times E'H';$$
$$R \times E''G'' = Q \times E''H'' - P \times E''F'';$$
$$R \times E'''G''' = P \times E'''F''' - Q \times E'''H''';$$
$$P \times EG = Q \times GH;$$
$$P \times EH = R \times GH;$$
$$R \times EG = Q \times EH.$$

Les trois dernières de ces équations donnent les proportions suivantes :

$$P : GH :: Q : EG;$$
$$P : GH :: R : EH;$$
$$R : EH :: Q : EG.$$

D'où l'on tire la suite de raisons égales $P : GH :: Q : EG :: R : EH$; ce qui nous apprend que *deux puissances parallèles & leur résultante, sont proportionnelles chacune à la partie de la perpendiculaire comprise entre les directions des deux autres.*

Et puisque les parties IL, IK, KL, d'une oblique quelconque, interceptées entre les mêmes directions, sont entr'elles comme les parties EH, EG, GH, de la perpendiculaire, on pourra dire aussi que *deux forces parallèles & leur résultante sont entr'elles chacune comme la partie d'une oblique, interceptée entre les directions des deux autres forces.*

XXIX.

COROLLAIRE IV. *La résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme, si elles agissent dans le même sens, ou à leur différence, si elles agissent en sens contraires.*

Pour le démontrer, supposons d'abord que les forces P & Q agissent dans le même sens (*Fig.* 15.). Dans la suite des raisons égales $P : GH :: Q : EG$

:: R : EH, la ſomme des deux premiers antécédents eſt à la ſomme de leurs conſéquents, comme le troiſième antécédent eſt à ſon conſéquent; c'eſt-à-dire, $P+Q : GH+EG :: R : EH$. Mais dans cette proportion les deux conſéquents ſont égaux; donc il y a égalité entre les deux antécédents. Donc $R=P+Q$.

Suppoſons enſuite que les forces P & Q (*Fig.* 16.) agiſſent en ſens oppoſés. Dans la ſuite de raiſons égales $P : GH :: Q : EG :: R : EH$, la différence des deux premiers antécédents ſera à la différence des deux premiers conſéquents, comme le troiſième antécédent eſt à ſon conſéquent. Donc $P-Q : GH-EG :: R : EH$. Or il eſt évident que $EH=GH-EG$. Donc $R=P-Q$.

On peut remarquer ici que lorſque deux puiſſances parallèles agiſſent en ſens contraires, la plus grande ſe trouve entre les directions de la réſultante & de la plus petite. En effet, la puiſſance P (*Fig* 16.) eſt proportionnelle à la ligne HG, tandis que les puiſſances Q, R, ne ſont reſpectivement proportionnelles qu'aux parties EG, HE de cette ligne.

XXX.

Corollaire V. On trouvera donc toujours la poſition de la réſultante de deux forces parallèles, en employant la proportion ſuivante, que nous avons démontrée *Num.* XXVIII. *La réſultante*

est à la distance comprise entre les directions des forces composantes, comme l'une de ces forces est à la distance comprise entre les directions de l'autre & de la résultante.

Car il est évident que la valeur & la position des forces composantes étant données, les trois premiers termes de cette proportion sont connus, & font connoître le quatrième, qui est la distance de la résultante à la direction de l'une des forces composantes. Donc la position de la résultante est déterminée.

XXXI.

CorollaIre VI. *La résultante de tant de puissances parallèles qu'on voudra, est égale à la somme de celles qui sont dirigées en un sens, moins la somme de celles qui sont dirigées en sens opposé.*

Pour le démontrer, supposons trois puissances P, Q, T, qui agissent dans un sens, & dont la résultante soit R. Supposons pareillement trois puissances S, V, Z, qui soient dirigées en sens opposé, & dont la résultante soit R'. Si l'on nomme r la résultante des deux puissances P, Q, on aura $r = P + Q$, parce que (*Num.* XXIX.) la résultante de deux puissances parallèles, dirigées dans le même sens, est égale à leur somme. Par la même raison, la résultante de la puissance r & de la puissance T sera $r + T = P + Q + T$: or la résul-

tante de la puiſſance r & de la puiſſance T eſt la réſultante des trois puiſſances P, Q, T, parce que r repréſente P & Q dont elle eſt la réſultante ; donc $R = P + Q + T$.

On démontrera par un ſemblable raiſonnement, que $R' = S + V + Z$. Cela poſé, on peut regarder les deux réſultantes R, R', comme deux puiſſances parallèles qui agiſſent en ſens contraire : donc (*Num.* XXIX) leur réſultante que j'appelle R'', ſera égale à leur différence ; & ſi nous ſuppoſons que R ſoit plus grande que R', nous aurons $R'' = R - R' = P + Q + T - S - V - Z$; c'eſt-à-dire, que la réſultante totale des forces parallèles eſt égale à la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent en ſens oppoſé.

Si l'on avoit ſuppoſé R' plus grande que R, on auroit eu $R'' = R' - R = S + V + Z - P - Q - T$; d'où l'on auroit tiré la même conſéquence.

Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit appliquer un raiſonnement ſemblable, quel que fût le nombre des forces parallèles.

XXXII.

COROLLAIRE VII. *Si on trouve la réſultante de pluſieurs forces compoſantes, & qu'on lui ſubſtitue une force égale dirigée ſur la même ligne, mais en un ſens diamétralement oppoſé, cette*

nouvelle force sera équilibre à toutes les composantes.

Cela est évident : car la force qu'on substitueroit comme on vient de le proposer, étant égale & diamétralement opposée à la résultante de toutes les puissances composantes, feroit équilibre à cette résultante. Elle feroit donc équilibre à toutes les forces composantes, qui ne peuvent avoir que l'effet de leur résultante.

XXXIII.

COROLLAIRE VIII. *Quelque nombre de forces que l'on ait ; quelques grandeurs & quelques directions qu'elles aient, pourvu qu'elles soient toutes dans un même plan ; le moment de la résultante de toutes ces forces, par rapport à tel point qu'on voudra, pris dans ce plan, sera toujours égal à la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens autour de ce point, moins la somme des moments de celles qui tendent à faire tourner dans un sens contraire.*

Soient (*Fig.* 17.) les puissances quelconques P, Q, T, V, dont on suppose R la résultante. Prenons à volonté le point E pour centre des moments, & de ce point menons sur les directions des puissances les perpendiculaires EF, EH, EL, EI, EG. Supposons de plus, que r soit la résultante des deux puissances P, Q ; & nommons m

ſon moment; que r' ſoit la réſultante de r & de la puiſſance T, & nommons m' le moment de r'. R ſera la réſultante de r' & de la puiſſance V. Cela poſé, nous aurons par le théorème (*Num.* XXV.),

1° $m = P \times EF + Q \times EH$;
2° $m' = m - T \times EL$;
3° $R \times EG = m' - V \times EI$.

Dans ces équations, la ſomme des premiers membres égale la ſomme des ſeconds; c'eſt-à-dire, que $m + m' + R \times EG = P \times EF + Q \times EH + m - T \times EL + m' - V \times EI$. Retranchant de part & d'autre $m + m'$, il reſte l'équation qu'il falloit démontrer $R \times EG = P \times EF + Q \times EH - T \times EL - V \times EI$.

XXXIV.

Corollaire IX. Soient tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, Z, V, P, T, Q (*Fig.* 18.), qui aient pour réſultante une force R parallèle. Suppoſons de plus, que parmi les puiſſances compoſantes, il y en ait quelques-unes, par exemple, V & T, qui agiſſent en un ſens, tandis que les autres ſont dirigées en ſens oppoſé.

Nous aurons 1° $R = Z + P + Q - V - T$, parce que (*Num.* XXXI) la réſultante de pluſieurs forces parallèles eſt égale à la ſomme de

celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent en ſens contraire.

Nous aurons 2° $R \times EG = P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED$, parce que le moment de la réſultante de pluſieurs forces vaut les moments de celles qui tendent à faire tourner dans un ſens autour du centre E, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire.

XXXV.

Corollaire X. Si l'on diviſe par R la ſeconde équation du corollaire précédent, on aura

$$EG = \frac{P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED}{R}$$

ou $$EG = \frac{P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED.}{Z + P + Q - V - T}$$

Ainſi connoiſſant la valeur & la poſition de tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, il eſt facile de trouver la valeur de leur réſultante & la poſition de la ligne ſuivant laquelle elle agit. Car dans l'équation précédente, on connoît toutes les quantités qui forment le ſecond membre. Donc on connoît la ligne EG, qui eſt la diſtance du centre des moments à la réſultante.

XXXVI.

Corollaire XI. Veut-on ſavoir 1° quelle ſeroit la valeur de la diſtance EG du centre des

moments à la direction de la résultante, dans le cas où toutes les puissances agiroient dans le même sens? Qu'on fasse $V=o$, $T=o$, dans les équations du *Corollaire* X, & l'on trouvera

$$EG=\frac{P\times EF+Q\times EH-Z\times ED}{Z+P+Q};$$

ce qui nous apprend que *la distance du centre des moments à la direction de la résultante, est égale à la différence des moments, divisée par la somme des forces.*

2° Veut-on savoir quelle seroit la distance EG du centre des moments à la direction de la résultante, dans le cas où toutes les forces parallèles agiroient dans le même sens & seroient du même côté du centre des moments? Qu'on fasse $V=o$, $T=o$, $Z=o$, dans les équations du *Corollaire* X, & l'on aura

$$EG=\frac{P\times EF+Q\times EH}{P+Q};$$

ce qui nous apprend que *la distance du centre des moments à la direction de la résultante, seroit égale à la somme des moments des forces, divisée par la somme de ces forces.*

XXXVII.

COROLLAIRE XII. Supposons à présent plusieurs puissances parallèles P, Q, T, V (*Fig.* 19.) qui agissent dans différents plans; & que l'une d'en-

tr'elles, par exemple T, agisse dans un sens contraire à celui dans lequel les autres sont dirigées.

1° Leur résultante sera $P+Q-T+V$, comme nous l'avons démontré *Num.* XXXI.

2° Que l'on conçoive deux plans $ABCD$, $ADEF$, parallèles aux directions des puissances & dont l'un soit perpendiculaire à l'autre : que l'on conçoive de plus un troisième plan $BAFG$, perpendiculaire aux deux premiers. Je dis que *la résultante* R *de toutes les puissances sera autant éloignée du plan* ABCD, *qu'elle en seroit éloignée si toutes les forces composantes agissoient dans l'intersection* AF *des deux autres plans, aux extrémités* p', q', t', v' *des lignes* pp', qq', tt', vv', *parallèles à l'intersection* AB. (On suppose que p, q, t, v, sont les points où les directions des forces parallèles rencontrent le plan $BAFG$.)

En effet, si les puissances P & Q agissoient aux points p', q', leur résultante (*Num.* XXVIII.) passeroit par un point m', tel qu'on auroit la proportion $P : Q :: q'm' : p'm'$. Mais puisqu'on suppose que ces puissances agissent aux points p, q, leur résultante doit passer par un point m, tel qu'on ait la proportion $P : Q :: qm : pm$. Dans ces deux proportions la première raison est la même : donc les secondes raisons sont égales & donnent $q'm' : p'm' :: qm : pm$. Donc les lignes pq, $p'q'$ sont coupées proportionnellement aux points m & m'. Donc si

on mène la ligne $m m'$, elle sera parallèle aux lignes pp', qq', AB, & par consequent la direction de la résultante qui passe par le point m sera autant éloignée du plan $ABCD$, que si les deux puissances P & Q étoient appliquées aux points p' & q'.

Pareillement la résultante de la puissance T appliquée au point t', & de la puissance $P+Q$ appliquée au point m', passeroit par un point n', tel qu'on auroit la proportion $P+Q : T :: t'n' : m'n'$. Mais puisqu'on suppose que ces puissances agissent aux points t, m, leur résultante passe par un point n tellement placé, qu'on ait la proportion $P+Q : T :: tn : mn$. Donc $t'n' : m'n' :: tn : mn$. Ainsi les lignes tn, $t'n'$ sont coupées proportionnellement aux points m, m', & par conséquent la ligne nn' est parallèle aux lignes $m m'$, tt', AB. Donc la direction de la résultante des trois puissances, qui passe par le point n, sera autant éloignée du plan $ABCD$, que si les puissances T, P, Q étoient appliquées aux points t', p', q'.

On démontreroit par un semblable raisonnement, que la résultante R des quatre puissances P, Q, T, V, passe par quelque point r autant éloigné du plan $ABCD$, qu'en seroit éloigné le point r' par où elle passeroit, si les quatre puissances étoient appliquées aux points p', q', t', v'; & il est évident que la démonstration seroit applicable quel que fût le nombre des puissances parallèles.

XXXVIII.

Corollaire XIII. Suppoſons comme dans le corollaire précédent, tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, & qui agiſſent, ſi l'on veut, dans différents plans. *Le moment de la réſultante de ces puiſſances par rapport à un plan parallèle à leurs directions, eſt égal aux moments de celles qui tendent à faire tourner dans un ſens autour de l'interſection de ce plan & d'un plan perpendiculaire aux directions des puiſſances, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire autour de la même interſection.*

Pour le démontrer, ſuppoſons (*Fig.* 19.) toutes choſes comme dans le corollaire précédent, & menons des points p, q, t, v, r, les lignes pp'', qq'', tt'', vv'', rr'' perpendiculaires au plan des moments $ABCD$. Je dis qu'on aura l'équation,

$$R \times rr'' = P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''.$$

Car ſi les puiſſances P, Q, T, V agiſſoient aux points p', q', t', v', & qu'on regardât le point A comme le centre des moments, on auroit (*Num.* XXIV.)

$$R \times Ar' = P \times Ap' + Q \times Aq' - T \times At' - V \times Av'.$$

Or dans cette équation, au lieu des lignes Ar', Ap', Aq', At', Av', on peut mettre les lignes rr'', pp'', qq'', tt'', vv'', qui leur ſont égales, & l'on aura l'équation qu'il falloit démontrer,

$R \times rr'' = P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''$.

Dans cette équation, les deux derniers termes du second membre ont le signe négatif, parce que les puissances *P* & *Q* tendent à faire tourner dans un sens autour de *AB*, tandis que les puissances *T* & *V* tendent à faire tourner en sens opposé.

L'équation précédente divisée par *R*, donne

$$rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{R};$$

$$\text{ou } rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{P + Q - T + V},$$

parce que $R = P + Q - T + V$.

Donc si l'on connoît la valeur des puissances parallèles & leur position, ainsi que celle du plan des moments, on déterminera facilement la distance rr'' de la résultante à ce plan, puisque le second membre de l'équation précédente ne contiendra que des quantités connues.

On trouveroit de même que la distance rr' de la résultante au plan *ADEF*, est exprimée par l'équation

$$rr' = \frac{P \times pp' + Q \times qq' - T \times tt' + V \times vv'}{P + Q - T + V}.$$

XXXIX.

Problème I. *Un mobile étant sollicité par une force ou par plusieurs qui agissent suivant la même ligne, déterminer une nouvelle force qui le mette en équilibre.*

SOLUTION. Si le mobile *A* (*Fig.* 20.) n'eſt ſollicité que par une force *P* ſuivant la ligne *AB*, il eſt évident qu'on le mettra en équilibre, en lui appliquant une force *S* égale à la force *P*, mais dirigée en ſens diamétralement oppoſé.

Si pluſieurs forces P, P', P'', &c. (*Fig.* 21.) ſollicitent le mobile *A* ſuivant la même ligne & dans le même ſens, on pourra le mettre en équilibre, en lui appliquant en ſens contraire une puiſſance $S = P + P' + P''$, &c.

Enfin ſi pluſieurs forces P, P', P'', &c., agiſſent ſur le mobile dans le même ſens & ſuivant la même ligne (*Fig.* 22.), tandis que d'autres puiſſances plus foibles Q, Q', Q'', &c., le ſollicitent en ſens oppoſé; on le mettra en équilibre, en ajoutant à ces dernières puiſſances une force conſpirante $S = P + P' + P''$ &c. $- Q - Q' - Q''$ &c.

X L.

PROBLÈME II. *Déterminer la valeur & la direction d'une force* S (Fig. 6.), *qui faſſe équilibre à deux autres forces* P & Q, *dont les directions ſe rencontrent au centre du mobile A ſoumis à leur action.*

SOLUTION. Si les puiſſances *P* & *Q* ſont reſpectivement exprimées par les lignes *AB*, *AC*, & & qu'on achève le parallélogramme *ABDC*, la réſultante ſera repréſentée par la diagonale *AD*.

Cela

Cela posé, qu'on prolonge cette diagonale au-delà du point *A*, & qu'on applique au mobile, suivant cette direction prolongée, une puissance *S* représentée par la ligne *AK* de même longueur que la diagonale : le corps sera en équilibre. En effet, le corps sollicité par les forces *AK*, *AD*, qu'on suppose égales & diamétralement opposées, ne pourroit manquer d'être en équilibre : or les puissances *AB*, *AC* produisent le même effet que leur résultante *AD*. Donc le corps sollicité par les trois forces *AB*, *AC*, *AK*, sera nécessairement en équilibre.

XLI.

REMARQUE. Des six choses (angles & côtés) qui composent le triangle *ABD*, trois étant données, on peut, par les principes de la trigonométrie, trouver arithmétiquement les autres, lorsque des trois données, l'une au moins est un côté. Or les trois côtés *AB*, *BD*, *AD*, représentent les deux puissances composantes & la résultante ; l'angle *BAD* est l'angle compris entre les directions de la résultante & de la puissance *P* ; l'angle *ADB* est égal à l'angle *CAD* compris entre les directions de la résultante & de la puissance *Q* ; & l'angle *ABD* est le supplément de l'angle *BAC* compris entre les directions des deux puissances composantes. Donc de ces six choses, les deux puissances composantes, la résultante, les

deux angles formés par les directions de la résultante & des puissances composantes, le supplément de l'angle compris entre les directions des puissances composantes, trois étant données, on déterminera arithmétiquement les trois autres, pourvu qu'on ait parmi les trois choses données, l'une des puissances *P*, *Q*, *R*.

Il ne resteroit quelque chose d'indéterminé, que dans le cas où l'on donneroit deux des puissances & un angle aigu opposé à la plus petite de ces puissances.

XLII.

PROBLÈME III. *Déterminer la résultante de tant de puissances qu'on voudra*, P, Q, T, V (Fig. 23.), *qui concourent au même point* A, *& dont les valeurs sont représentées par les parties* AB, AC, AE, AG, *de leurs directions.*

SOLUTION. Pour trouver cette résultante, j'achève le parallélogramme *ABDC*, & la ligne *AD* représente la résultante des puissances *AB*, *AC*. Je prends donc, au lieu des forces *P* & *Q*, une puissance représentée par *AD*; & sur les lignes *AD*, *AE*, comme côtés contigus, je fais le parallélogramme *ADFE*. Menant la diagonale *AF*, elle représente la résultante des puissances *AE*, *AD*, & par conséquent la résultante des trois forces *AE*, *AC*, *AB*. Ensuite sur les lignes *AF*, *AG*,

comme côtés contigus du même angle, je fais le parallélogramme *AFHG*, & je mène la diagonale *AH*, qui repréſente la réſultante *R* des puiſſances *AG*, *AF*, ou des quatre puiſſances *AG*, *AE*, *AC*, *AB*. On trouveroit de même la réſultante d'un nombre quelconque de puiſſances.

On pourra donc aiſément trouver une puiſſance qui faſſe équilibre à tant de forces qu'on voudra, dont les directions concourent toutes au même point. Il ſuffira de trouver, comme on vient de le faire, la réſultante *R* des puiſſances données *P*, *Q*, *T*, *V*, &c., & d'appliquer au mobile, ſuivant la direction de cette réſultante prolongée au-delà du point *A*, une force *S*=*R*, qui agiſſe de *A* en *K*. Car (*Num.* XXXII.), ſi après avoir trouvé la réſultante de pluſieurs puiſſances propoſées, on lui ſubſtitue une force égale & dirigée en ſens contraire, elle fera néceſſairement équilibre à ces puiſſances. Cette remarque peut s'appliquer aux problèmes ſuivans.

XLIII.

PROBLÈME IV. *Déterminer la réſultante de deux puiſſances parallèles* P *&* Q (Fig. 15 & 16.).

SOLUTION. 1° Si les deux puiſſances parallèles *P*, *Q*, ſont dirigées dans le même ſens (*Fig.* 15.), leur réſultante *R* ſera égale à leur ſomme *P*+*Q*; & ſi les deux puiſſances ſont dirigées en ſens oppoſé (*Fig.* 16.), leur réſultante *R* vaudra leur dif-

férence $P-Q$, comme il a été démontré (*Num.* XXIX.). Donc on connoîtra toujours facilement la valeur de la résultante.

2° Pour trouver la position de cette résultante, on fera la proportion suivante : *la résultante connue est à la distance comprise entre les directions des deux puissances composantes, comme l'une de ces puissances composantes est à la distance comprise entre les directions de l'autre, & de la résultante.* Nous avons démontré cette proportion (*Num.* XXVIII.).

Si l'on tiroit une oblique IKL (*Fig.* 15.), ou LIK (*Fig.* 16.), qui coupât les directions des deux puissances composantes, on pourroit déterminer sur cette oblique le point K, où passe la direction de la résultante R, en faisant la proportion $R : IL :: P : KL$.

On voit par cette solution, que si les deux puissances P, Q étoient appliquées à deux points I, L, d'une verge inflexible sans pesanteur, & qu'après avoir déterminé le point K, où passe la direction de la résultante, on appliquât à ce point une puissance S, égale & diamétralement opposée à la résultante, 1° cette résultante feroit équilibre aux deux puissances P & Q, puisqu'elle détruiroit leur résultante ; 2° on trouveroit toujours le point K, auquel on doit appliquer la puissance S, en faisant la proportion $S = R : IL :: P : LK$.

XLIV.

PROBLÈME V. *Déterminer la résultante de plusieurs puissances parallèles appliquées à différents points d'un système de corps, & dirigées dans le même sens.*

SOLUTION. Supposons (*Fig.* 24.) un système de plusieurs corps A, B, C, D, liés par des verges infléxibles, sans pesanteur, & sollicités par les forces parallèles P, Q, T, V.

1° La résultante X des puissances P, Q, sera $P + Q$; & l'on déterminera le point E de la ligne AB, par lequel passe sa direction, en faisant $P + Q : P :: AB : BE$. Cela suit de ce qu'on vient de dire (*Num.* XLIII.).

2° La résultante Y des puissances X & T, sera $X + T$, ou $P + Q + T$; & l'on déterminera dans la ligne EC le point F, par lequel passe cette résultante, en faisant $P + Q + T : EC :: P + Q : FC$.

3° La résultante Z des puissances Y & V, sera $Y + V$, ou $P + Q + T + V$; & l'on déterminera dans la ligne FD le point G, par lequel passe cette résultante, en faisant la proportion $P + Q + T + V : FD :: P + Q + T : GD$.

La puissance $Z = P + Q + T + V$ est la résultante de toutes les puissances parallèles, dans la supposition que nous avons faite; & l'on voit aisément qu'il n'y auroit pas plus de difficulté à résoudre

le problême, dans le cas où l'on ſuppoſeroit un plus grand nombre de forces parallèles.

On pourroit auſſi trouver la réſultante *Z* par la méthode que nous employerons dans un moment pour réſoudre le *Problème* VI ; mais nous n'avons pas cru devoir omettre la ſolution précédente, parce qu'elle nous donne lieu de faire ici deux remarques importantes.

X L V.

REMARQUE I. Si les puiſſances *P*, *Q*, *T*, *V*, n'avoient pas agi ſur le ſyſtème de corps ſuivant les directions *AP*, *BQ*, *CT*, *DV*, mais ſuivant d'autres directions quelconques parallèles *Ap*, *Bq*, *Ct*, *Dv*, la réſultante des puiſſances *P*, *Q*, auroit toujours paſſé par le point *E*, & eût été dirigée ſuivant la ligne *Ex*, parallèle aux directions des puiſſances. De même la réſultante des trois puiſſances *P*, *Q*, *T*, auroit toujours paſſé par le point *F*, & ſa direction auroit été *Fy*. Pareillement la réſultante des quatre puiſſances *P*, *Q*, *T*, *V*, auroit paſſé par le point *G*, & ſa direction auroit été *Gz*. Donc *dans tout ſyſtème de corps ſollicité par des forces parallèles, il y a un point* G *par où paſſera toujours la réſultante de toutes les puiſſances parallèles, tant que le rapport de leurs valeurs ne changera pas, quelle que ſoit d'ailleurs leur direction.* Donc ce point *G* ſe trouvera toujours dans

la direction de la force qu'on employera pour faire équilibre à toutes les forces parallèles qui agissent sur le systême de corps. Ce point remarquable peut s'appeler *le centre des forces parallèles*.

XLVI.

REMARQUE II. Lorsqu'un corps se meut, ou tend à se mouvoir suivant une direction quelconque, on peut imaginer ce corps comme composé d'une infinité de parallélipipèdes rectangles égaux, & dont les côtés soient parallèles à la direction du corps. Ces parallélipipèdes se mouvront ou tendront à se mouvoir suivant leur longueur, avec une vîtesse égale à celle du corps, & l'on pourra les considérer comme sollicités par des forces parallèles égales. Chacune de ces forces étant le produit du parallélipipède élémentaire auquel elle est appliquée, par la vîtesse commune, la résultante de toutes ces forces sera la somme de tous les parallélipipèdes, ou la masse totale multipliée par la vîtesse du corps: ainsi cette résultante sera exprimée par la quantité de mouvement du corps. Mais il est évident, d'après la remarque précédente (*Num.* XLV.), que cette résultante peut toujours être censée agir dans le seul parallélipipède placé au centre des forces parallèles. Donc on voit aisément par-là, comment l'équilibre de deux corps se réduit à celui de deux parallélipipèdes à bases égales,

& par conséquent comment le troisième principe fondamental, démontré *Num.* XX., s'applique à des corps de figure quelconque.

XLVII.

PROBLÈME VI. *Déterminer la résultante de plusieurs puissances parallèles, soit qu'elles agissent toutes dans le même sens, soit qu'il y en ait qui agissent dans un sens contraire à celui des autres.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 19.) les puissances parallèles P, Q, T, V, & supposons que la puissance T n'agisse pas dans le même sens que les autres. Concevons les trois plans $ABCD$, $ADEF$, $ABGF$, tels que nous les avons supposés *Num.* XXXVII.

1° On aura évidemment la résultante $R = P + Q + V - T$.

2° La distance du plan $ABCD$ à la direction de la résultante, sera

$$rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{P + Q + V - T}.$$

3° La distance du plan $ADEF$ à la direction de la résultante, sera

$$rr' = \frac{P \times pp' + Q \times qq' + V \times vv' - T \times tt'}{P + Q + V - T}.$$

Ainsi on connoîtra les valeurs des lignes rr'', rr'. Tout cela est clair par ce que nous avons démontré *Num.* XXXVIII.

4° Qu'on prenne sur la ligne *AF* la partie $Ar' = rr''$, & qu'on mène la ligne $r'r$ parallèle à la ligne *AB*. Qu'on prenne de même sur *AB*, la partie $Ar'' = rr'$, & qu'on mène la ligne $r''r$ parallèlement à la ligne *AF*. Les deux lignes $r''r$, $r'r$ se rencontreront en un point *r* par où devra passer la direction de la résultante.

Je ne m'arrête pas au cas où toutes les puissances parallèles agiroient dans le même plan. Le problème se résoudroit alors sans difficulté, par ce que nous avons dit *Num.* XXXV.

XLVIII.

PROBLÈME VII. *Déterminer la résultante de plusieurs puissances qui agissent dans un même plan, suivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Soient les trois puissances *P*, *Q*, *T*, (*Fig.* 25.), représentées par les lignes *AB*, *CD*, *EF*, suivant les directions desquelles elles agissent.

1° Qu'on prolonge les directions des puissances *P* & *Q* jusqu'à leur point de concours *d*. Pour représenter la puissance *P*, on pourra prendre $ad = AB$. Car l'action d'une puissance est la même en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée. De même, pour représenter la puissance *Q*, on pourra prendre $cd = CD$. Or il est évident que la résultante des puissances représentées par

ad & par *cd*, sera exprimée par la diagonale *Gd* du parallélogramme *adcG* : donc la valeur & la direction de cette diagonale *Gd* donneront la valeur & la direction de la résultante des deux puissances *P* & *Q*.

2° Qu'on prolonge les directions de la puissance *T* & de la résultante *Gd* jusqu'au point *H* où elles se rencontrent. Pour représenter la puissance *T*, on pourra prendre *eH* = *EF*. De même, pour représenter la puissance exprimée par *Gd*, on pourra prendre *gH* = *Gd*. Or il est encore évident que la résultante des puissances exprimées par *eH* & par *gH*, est représentée par la digonale *HR* du parallélogramme *HeRg* : donc la valeur & la direction de la résultante *HR* feront la valeur & la direction de la résultante des trois puissances *P*, *Q*, *T*.

On voit par là comment on pourroit s'y prendre pour déterminer la résultante d'un plus grand nombre de puissances.

XLIX.

PROBLÈME VIII. *Décomposer une puissance donnée en deux autres, qui soient parallèles à deux lignes tirées dans un plan dans lequel agit cette puissance.*

SOLUTION. Soit *P* (*Fig.* 26.) une puissance qu'on propose de décomposer en deux autres, dont l'une soit parallèle à la ligne *OM* & l'autre à la

ligne *ON*. Supposons que la valeur & la direction de la puissance *P* soient *AD*, & menons par le point *A* deux lignes *AB*, *AC*, parallèles aux lignes données. Menons de même par le point *D* les deux lignes *DB*, *DC*, parallèles à ces lignes données: on aura le parallélogramme *ABDC*, & l'on pourra prendre, au lieu de la puissance *P* représentée par la diagonale *AD*, les deux puissances *AB*, *AC*, parallèles aux deux lignes données *OM*, *ON*. On aura donc la décomposition qu'on demandoit.

L.

PROBLÈME IX. *Décomposer une force donnée en trois autres perpendiculaires à trois plans, dont chacun est perpendiculaire aux deux autres.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 27.) les trois plans *EFGH*, *GHIK*, *FGKL*, dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres. Supposons que la puissance *P* qu'il s'agit de décomposer, soit représentée par la partie *AD* de sa direction, & qu'elle soit appliquée au point *A* du plan *GHIK*.

1° Menons par le point *A* la ligne indéfinie *AB*, perpendiculaire au plan *GHIK*; & du point *D* abaissons sur le même plan la perpendiculaire *DC*. Si l'on joint les points *A*, *C*, par la ligne *AC*, & qu'on tire ensuite du point *D* la ligne *DB*, parallèle à *CA*, on aura un parallélogramme *ABDC*. Donc au lieu de la puissance *P*, on pourra prendre

deux forces exprimées par *AB* & par *AC*, dont la première est perpendiculaire au plan *GHIK*, tandis que l'autre agit dans ce plan.

2° Que l'on décompose à présent la force *AC* en deux autres *Aa*, *Ab*, parallèles aux lignes *HG*, *HI*, ainsi que nous avons vu (*Num.* XLIX.) qu'on pouvoit le faire ; & au lieu de la puissance *P*, on pourra évidemment en prendre trois autres *AB*, *Aa*, *Ab*, dont la première est perpendiculaire au plan *GHIK*, la seconde au plan *FGKL*, & la troisième au plan *EFGH*.

L I.

PROBLÈME X. *Décomposer une force donnée en deux forces parallèles, qui agissent dans le même plan qu'elle, & dont les directions passent par deux points donnés.*

SOLUTION. Soit *P* (*Fig.* 28, 29.) la puissance à décomposer, *BP* sa direction, *A* & *C* les points par lesquels doivent passer les directions des deux puissances *Q* & *T* dans lesquelles on veut décomposer *P*. Il s'agit de déterminer ce que doivent valoir *Q* & *T*, pour que *P* soit leur résultante. Or ayant mené une ligne *ABC* (*Fig.* 28.), ou *ACB* (*Fig.* 29.) qui coupe les directions des puissances *P*, *Q*, *T*, il est clair (*Num.* XXVIII.) que ces puissances doivent être proportionnelles chacune à la partie de cette sécante comprise entre les

rections des deux autres. On aura donc les deux proportions suivantes :

$$AC : P :: BC : Q.$$
$$AC : P :: AB : T.$$

Dans ces proportions les trois premiers termes étant supposés connus, on aura la valeur des puissances composantes Q & T; on aura, dis-je, $Q = \frac{P \times BC}{AC}$, & $T = \frac{P \times AB}{AC}$.

L I I.

PROBLÈME XI. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent toutes dans un plan qu'elles sollicitent au mouvement.*

SOLUTION. Soit un plan MN (*Fig.* 30.) sollicité par quatre puissances P, Q, T, V, représentées par les parties AP, CQ, DT, BV de leurs directions. Il est évident que pour l'équilibre, il faut & il suffit, que l'une des puissances, par exemple V, soit égale & diamétralement opposée suivant la même ligne, à la résultante des autres puissances P, Q, T. Cela posé, concevons que chacune des puissances données soit décomposée en deux autres parallèles aux deux lignes OM, ON, qui font entr'elles un angle droit : que P, par exemple, soit décomposée en p, p' exprimées par Ap, Ap'; Q en q, q' exprimées par Cq, Cq',

& ainſi des autres. Pour qu'il y ait équilibre, les conditions ſuivantes ſont néceſſaires & ſuffiſent.

1° *Chaque réſultante des puiſſances parallèles doit être zéro.*

2° *Si l'on prend dans le plan un point quelconque* E, *les moments des puiſſances qui tendent à faire tourner le plan dans un ſens autour de ce point, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens opposé, doivent être zéro.*

La première condition eſt évidemment requiſe pour l'équilibre. En effet, ſi les deux réſultantes des puiſſances parallèles n'étoient pas zéro ſéparément, la réſultante totale ne feroit pas zéro elle-même, puiſque deux réſultantes partielles qui ont quelque valeur, & dont les directions font un angle droit, donnent néceſſairement une réſultante totale exprimé par la diagonale du parallélogramme conſtruit ſur leurs directions. Donc pour l'équilibre du plan, il faut que chaque réſultante des puiſſances parallèles ſoit zéro.

La ſeconde condition n'eſt pas moins requiſe pour l'équilibre. Car (*Num.* XXXIII.) la différence des moments dont il s'agit, doit être égale au moment de la réſultante générale de toutes les puiſſances qui agiſſent dans le plan. Or, dans le cas de l'équilibre, cette réſultante eſt nulle, & l'on peut ſuppoſer qu'elle ſoit dirigée ſuivant la ligne *VG*, comme nous l'avons obſervé ci-deſſus: donc

n menant du point E la perpendiculaire EG sur la direction de la puissance V, le moment de la résultante totale sera $o \times EG = o$: donc aussi la différence des moments des puissances qui tendent à faire tourner autour du point E, doit être zéro dans le cas de l'équilibre.

Enfin, si les deux conditions ont lieu, il y aura nécessairement équilibre dans le plan. Car il suffit pour l'équilibre, que la résultante de toutes les puissances qui sollicitent le plan, soit nulle par l'effet d'une destruction de forces faite dans la même ligne. Or si l'on suppose que la première condition ait lieu, la résultante est nulle, puisque les deux résultantes partielles des puissances parallèles ne peuvent être zéro, que leur résultante totale ne soit nulle : & si l'on suppose de plus que la seconde condition ait lieu, la résultante totale sera nulle par l'effet d'une destruction de forces faite dans la même ligne, & non par la suite d'une opposition de forces dans deux lignes parallèles.

En effet, quand la résultante totale devient nulle par l'opposition de deux forces composantes parallèles, égales & dirigées en sens contraire, jamais la différence des moments dont il s'agit dans la seconde condition, n'est zéro. Supposons pour le démontrer, que la résultante des puissances P, Q, T, soit une force Z, égale & parallèle à la force V, mais qui agisse suivant la ligne FZ, en sens opposé

à l'action de la force V. Si on prend le centre des moments en E'' entre les directions des forces V & Z, les deux forces tendront à faire tourner dans le même sens autour de ce point, & leurs moments ne se détruiront pas. Si on prend le centre des moments en E' sur la direction de l'une des forces Z, le moment de cette force deviendra nul, & rien ne détruira le moment $V \times E'G$ de l'autre. Enfin, si on prend le centre des moments en E hors des directions des deux puissances, la différence des moments sera $V \times EG - Z \times EE'$, qui évidemment n'est pas zéro, puisque V étant égal à Z, & EG plus grand que EE', le moment positif est plus grand que le négatif. Donc si la résultante Z des puissances P, Q, T, n'est pas opposée à la dernière force V suivant la même ligne, jamais la différence des moments de Z & de V, ou ce qui est la même chose, de P, Q, T, V, par rapport à un point pris dans le plan MN, ne sera zéro.

LIII.

REMARQUE. S'il y avoit dans le plan sollicité par les puissances, un point fixe E, de manière que le plan ne pût recevoir qu'un mouvement de rotation autour de ce point, il suffiroit pour l'équilibre, que les moments des puissances qui tendent à faire tourner autour de ce point dans un sens, moins les moments de celles qui tendent à faire

tourner

tourner en ſens contraire, fuſſent zéro. Car cette condition ayant lieu, on aura zéro pour le moment de la réſultante, qui (*Num.* XXXIII.) eſt toujours égal à la différence des moments des puiſſances compoſantes. Donc il faudra que la réſultante totale ſoit elle-même zéro, à cauſe d'une éliſion faite dans la même ligne, ou qu'elle paſſe par le point fixe *E*. Dans le premier cas, il y a évidemment équilibre. Dans le ſecond, la réſultante agira contre le point immobile, & ſera détruite par ſa réſiſtance: donc elle ne pourra produire aucun mouvement dans le plan.

LIV.

PROBLÈME XII. *Etant données tant de puiſſances qu'on voudra, qui agiſſent dans différents plans, ſuivant des directions quelconques, décompoſer ces puiſſances en d'autres équivalentes qui n'agiſſent que dans trois plans, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres.*

SOLUTION. Soient les trois plans *HI*, *KL*, *MN* (*Fig.* 31.), dont chacun eſt perpendiculaire aux deux autres, & dans leſquels doivent agir les puiſſances qu'on veut ſubſtituer aux puiſſances données.

1° Je décompoſe par le problème IX (*Num.* L.) chaque puiſſance donnée en trois autres perpendiculaires aux trois plans.

2° Soit *P* l'une des puiſſances qui, après cette

première décompoſition, ſeront perpendiculaires au plan *MN*. Par le point *V*, où la direction de cette puiſſance rencontre ce plan, je tire la ligne *SVT* juſqu'aux interſections de *MN* avec les deux autres plans. Je peux (*Num.* II.) décompoſer la puiſſance *P* en deux autres *Q*, *R*, qui paſſent par les points *S*, *T*, & qui ſeront dans les plans *HI* & *KL*. J'aurai $Q = \frac{P \times VT}{ST}$ & $R = \frac{P \times VS}{ST}$.

On pourra traiter toutes les puiſſances perpendiculaires au plan *MN* comme la puiſſance *P*. On pourra décompoſer pareillement les puiſſances perpendiculaires aux plans *HI*, *KL*. Donc il eſt toujours poſſible de décompoſer par cette méthode, un nombre quelconque de puiſſances dirigées comme on voudra, en d'autres équivalentes, & qui n'agiſſent que dans trois plans, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres.

Pour comprendre le dernier problème, qui eſt le plus général de tous, il faut s'arrêter un moment aux remarques ſuivantes.

L V.

Remarque I. Il eſt évident que la puiſſance *Q* qui agit dans le plan *KL*, tend à le mouvoir, & qu'elle le feroit tourner autour du point *C*, ſi ce point étoit immobile. De même, la puiſſance *R*, tend à mouvoir le plan *HI*, dans lequel

elle agit, & si le point *C* étoit fixe, elle feroit tourner le plan autour de ce point. Donc puisque la puissance *P* équivaut aux deux puissances *Q*, *R*, dont elle est résultante, il est visible que cette puissance *P*, tend à imprimer un mouvement de rotation aux deux plans *KL*, *HI*, qui lui sont parallèles. On peut dire la même chose d'une autre puissance quelconque par rapport aux plans parallèles.

L V I.

REMARQUE II. Soit *P* une puissance décomposée comme dans le problême précédent, en deux autres *Q* & *R*, qui agissent dans les plans parallèles *KL*, *HI*. La puissance *Q* qui se trouve dans le plan *KL*, aura, par rapport à l'intersection *C* des trois plans, un moment égal à celui de la puissance décomposée *P*, relativement à l'intersection *DE* des deux autres plans *MN*, *HI*.

En effet, la puissance *P* étant la résultante des forces *Q*, *R*, son moment, par rapport au plan *HI*, ou par rapport à l'axe *DE*, vaut la somme des moments de *Q* & de *R*. Mais la puissance *R* se trouvant dans le plan *HI*, son moment, par rapport à *DE*, est zéro. Donc le moment de *P*, par rapport à *DE*, est égal au moment de la puissance *Q*; c'est-à-dire, qu'en abaissant du point *V* la perpendiculaire *VY* sur *DE*, on aura $P \times VY = Q \times CS$.

En prenant la puissance R qui se trouve dans le plan HI, on prouveroit de même, que son moment, par rapport au point C, est égal au moment de la puissance P, par rapport à l'interſection AB des deux autres plans. Donc, en abaissant du point V la perpendiculaire VZ sur AB, on auroit $P \times VZ = R \times CT$.

LVII.

PROBLÈME XIII. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent sur un système de corps suivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Concevons (*Fig.* 31.) trois plans dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & supposons qu'on ait décomposé toutes les puissances de manière que chacune agisse dans l'un de ces trois plans, & soit perpendiculaire à un autre de ces plans. Nous avons enseigné (*Problème* XII.) la manière de faire cette décomposition des puissances. Cela posé, voici les deux conditions qui sont nécessaires & qui suffisent pour l'équilibre.

1° Que *la résultante des puissances perpendiculaires au même plan soit zéro.*

2° Que *les moments des puissances qui se trouvent dans le même plan, & qui tendent à le faire tourner dans un sens autour de l'interſection des deux autres plans, moins les moments de celles*

qui tendent à le faire tourner en ſens contraire autour de la même interſection, ſoient zéro.

La première condition eſt néceſſaire, parce que ſi la réſultante de toutes les puiſſances perpendiculaires au même plan n'étoit pas zéro, cette réſultante donneroit néceſſairement du mouvement au ſyſtème de corps, puiſque cette réſultante ne pourroit pas être détruite par les autres puiſſances qui font avec elle un angle droit. Donc ſi la première condition n'avoit pas lieu, il n'y auroit pas équilibre dans le ſyſtème de corps.

La ſeconde condition eſt requiſe, parce qu'il ne peut y avoir équilibre dans l'un des plans, dans *KL*, par exemple, à moins que la réſultante de toutes les forces qui agiſſent dans ce plan ne ſoit nulle, à cauſe d'une deſtruction de ces forces faite dans la même ligne, ou que cette réſultante ayant quelque valeur, ne ſoit détruite par les puiſſances qui agiſſent dans les autres plans *MN*, *HI*.

Dans le premier cas, le moment de la réſultante ſera zéro, & les moments dont il s'agit dans la ſeconde condition, ſeront pareillement zéro, puiſque (*Num.* XXXIII.) ils ſont toujours égaux à celui de la réſultante.

Dans le ſecond cas, la réſultante des puiſſances qui agiſſent dans le plan *KL*, & qui devra être détruite par les puiſſances qui agiſſent dans les autres plans, paſſera néceſſairement par le point *C*

où ſe coupent les trois plans. En effet, pour que la réſultante des puiſſances qui agiſſent dans le plan *KL*, ſoit détruite par la réſultante des puiſſances qui ſe trouvent dans les autres plans, il faut que celle-ci ſe trouve dans le plan *KL*, afin qu'elle puiſſe être diamétralement oppoſée à la première. De plus, cette réſultante des puiſſances qui ſont dans les deux autres plans, paſſe néceſſairement par un point de leur commune interſection *DE*. Donc puiſque le point *C* eſt le ſeul point qui appartienne au plan *KL*, cette réſultante paſſera par ce point, & ne pourra détruire la réſultante des puiſſances qu'on ſuppoſe dans *KL*, à moins que la direction de cette dernière ne paſſe par le même point *C*, ce qui rendra ſon moment nül par rapport à ce point. Donc la différence des moments des puiſſances du plan *KL*, qui eſt toujours égale au moment de leur réſultante, ſera zéro par rapport au point *C*.

On pourra appliquer aux puiſſances qui agiſſent dans les plans *MN*, *HI*, ce que nous avons dit de celles qui agiſſent dans le plan *KL*. Donc il faut que les deux conditions aſſignées aient lieu, pour que le ſyſtème de corps ſoit en équilibre.

Il eſt viſible de plus, que ces deux conditions ſuffiſent pour l'équilibre. Car ſi la première a lieu, il n'y aura dans le ſyſtème de corps aucun mouvement pour s'éloigner ni du plan *MN*, ni du plan *KL*, ni du plan *HI*, puiſque les réſultantes des

puiſſances perpendiculaires à ces trois plans ſeront zéro. Si la ſeconde condition a lieu en même tems, les trois réſultantes des forces qu'on ſuppoſe agir dans les trois plans, ſeront chacune zéro, par une deſtruction de forces faite dans chaque plan, ſuivant la même ligne (*Num.* LII.); ou celles de ces trois réſultantes qui conſerveront quelque valeur, paſſeront par le point *C*, & dans ce cas, elles ſe détruiront mutuellement au point de concours *C*; autrement leur réſultante totale donneroit un mouvement de tranſlation au ſyſtème de corps, & la première condition n'auroit pas lieu, ce qui eſt contre l'hypothèſe. Donc les deux conditions ayant lieu à la fois, la réſultante des puiſſances qui agiſſent dans chaque plan, ſera zéro, par une deſtruction de forces faite dans la même ligne; ce qui produira dans le ſyſtème de corps un équilibre abſolu.

LVIII.

REMARQUE I. Si dans un ſyſtème de corps ſollicité par différentes puiſſances, il ſe trouvoit un point fixe *C* autour duquel le ſyſtème pût tourner en tous ſens, la ſeconde des conditions que nous avons aſſignées, ſuffiroit pour l'équilibre: *il ſuffiroit*, dis-je, *qu'en prenant les puiſſances qui agiſſent dans le même plan, la différence de leurs moments, par rapport au point fixe, fût zéro.*

Car alors (*Num.* LIII.) les puiſſances qui agiront

dans chacun des plans, feront en équilibre. Donc il y aura auffi équilibre dans le fyftème de corps qui n'eft follicité que par ces puiffances.

L I X.

REMARQUE II. Nous avons fuppofé, pour démontrer les conditions de l'équilibre des puiffances qui agiffent fur un fyftème de corps, que ces puiffances fuffent réduites à d'autres, dont l'action fe fît dans les trois plans *KL*, *HI*, *MN*, ce qui demande les deux décompofitions qui font l'objet des problèmes IX & XII. Mais on peut voir aifément, 1° que la fomme des puiffances qui, après la décompofition du problème IX, font perpendiculaires à l'un des plans, eft la même que celle des puiffances perpendiculaires au même plan, après la décompofition du problème XII, puifqu'une puiffance quelconque *P*, vaut les deux puiffances *Q*, *R*, qu'on lui fubftitue: 2° qu'après la décompofition du problème IX, les moments des puiffances pour faire tourner autour d'une interfection des plans, font les mêmes que ceux des puiffances qui, après la décompofition du problème XII, font tourner autour du point *C*. Car (*Num.* LVI.), le moment de la puiffance *P*, par rapport à l'interfection *DE*, eft égal au moment de la puiffance *Q* par rapport au point *C*; & le moment de la même puiffance *P*, par rapport à l'interfection

AB, eſt égal au moment de la puiſſance *R* par rapport au même point *C*.

On peut donc énoncer de la manière ſuivante, les conditions de l'équilibre d'un ſyſtème de corps ſoumis à l'action de tant de puiſſances qu'on voudra: *Ayant décompoſé chaque force en d'autres perpendiculaires à trois plans qu'on imagine & qu'on ſuppoſe ſe couper à angles droits, il faut* 1° *que la réſultante de toutes les forces perpendiculaires au même plan, ſoit zéro. Il faut* 2° *que les puiſſances perpendiculaires à deux quelconques des trois plans, ſoient tellement diſpoſées, que la différence de leurs moments, par rapport à l'interſection de ces deux plans, ſoit zéro.*

L X.

REMARQUE III. Etant données tant de forces qu'on voudra, chacune peut (*Num.* L.) ſe décompoſer en trois autres perpendiculaires à trois plans qui ſe coupent à angles droits. Après cette décompoſition, toutes les forces perpendiculaires au même plan, ſe trouvant parallèles, pourront (*Num.* XLVII.) ſe réduire à une ſeule. Donc *quel que ſoit le nombre des forces qui agiſſent ſur un ſyſtème de corps, on peut toujours les réduire à trois.*

On pourroit même les réduire à deux. Car imaginant un plan qui fût rencontré par les directions

de ces forces, & les concevant appliquées à ce plan, on pourroit décompofer chacune en deux autres, dont l'une feroit dans le plan, tandis que l'autre lui feroit perpendiculaire. C'eft ainfi que nous avons décompofé (*Num.* L.) la puiffance *P* (*Fig.* 27.) en deux autres *AC*, *AB*. Enfuite toutes les forces perpendiculaires au plan, feroient réductibles à une feule, par la méthode expliquée (*Num.* XLVII.); & les puiffances qui agiroient dans le plan, fe réduiroient à une feule par la méthode donnée (*Num.* XLVIII.).

On auroit ainfi, pour tant de puiffances qu'on voudroit, deux réfultantes générales, qu'on ne pourroit réduire à une feule force, que dans le cas où leurs directions concourroient au même point.

ARTICLE II.

Du Centre de Gravité des Corps.

LXI.

ON appelle *gravité* ou *pefanteur*, la force en vertu de laquelle les corps abandonnés à eux-mêmes, defcendent ou tendent à defcendre vers le centre de la terre. Cette force agit fur tous les corps & fur toutes les molécules matérielles dont ils font compofés; & quoiqu'à parler rigoureufement, fa grandeur foit différente à différentes diftances de

l'équateur & à différents éloignements du centre de la terre, les quantités dont elle diffère par ces causes, ne peuvent être sensibles dans les corps qui sont l'objet de la statique ordinaire. Ainsi nous considérerons ici la gravité, comme une force qui est la même dans toutes les parties des corps; c'est-à-dire, qui sollicite chaque molécule matérielle à descendre d'une même quantité dans un même tems.

On distingue la gravité *simple*, la gravité *absolue* & la gravité *relative*. La gravité *simple* est la force qui agit sur chaque molécule d'un corps. La gravité *absolue* est la résultante de toutes les gravités simples qui sollicitent les différentes molécules dont un corps est composé. Elle est la même chose que le poids de ce corps. La gravité *relative* est le poids d'un corps sous un volume donné. C'est, par exemple, ce que pèse un pouce cubique, un pied cubique, &c., d'un corps proposé.

L X I I.

On appelle ligne *verticale*, celle suivant laquelle tombent les corps en vertu de leur gravité; ligne *horizontale*, celle qui est perpendiculaire à la verticale; plan *vertical*, celui qui est mené par une ligne verticale; & plan *horizontal* celui qui est perpendiculaire à une ligne verticale.

L X I I I.

Théorème. *Un corps pesant quelconque peut*

re considéré comme un système de corps sollicités ır des forces parallèles.

En effet, puisqu'il n'est ici question que des ırps solides, un corps pesant quelconque est com- ısé d'un nombre infini, pour ainsi dire, d'éléments ıis ensemble en vertu de la dureté ; & chacun de s éléments est sollicité par sa gravité, qui est une rce qui tend à le porter vers le centre de la terre. r les gravités auxquelles sont soumis les divers éments du même corps, doivent être regardées mme des forces sensiblement parallèles. Car leurs rections prolongées ne se réuniroient qu'au centre ı globe terrestre ; c'est-à-dire, qu'à une distance : près de 1500 lieues. On peut prouver aisément ır le calcul, qu'en prenant sur la surface de la rre deux points éloignés de 16 toises, & menant : ces points deux lignes au centre du globe, leur clinaison seroit à peine d'une seconde. Donc on ut regarder comme sensiblement parallèles, les rections de gravités qui sollicitent les parties émentaires d'un même corps.

LXIV.

COROLLAIRE. *Donc on peut appliquer aux rps pesants tout ce qu'on a démontré dans l'ar- :le précédent touchant les forces parallèles.* Il ffira pour faire cette application, de considérer mme autant de forces parallèles les gravités

particulières des molécules élémentaires dont les corps sont composés.

Ainsi en concevant que A, B, C, D, &c., (*Fig.* 24.) soient les éléments d'un corps, & que les puissances parallèles P, Q, T, V, &c., soient les gravités ou les poids de ces éléments, nous pourrons tirer les conclusions suivantes :

1° *Le poids total d'un corps est égal à la somme des poids élémentaires dont il est composé.* Car (*Num.* XLIV.) la résultante de toutes les forces P, Q, T, V, &c., est égale à la somme $P + Q + T + V$, &c.

2° *Quelle que soit la position d'un corps, son poids total sera toujours le même.* Car quelle que soit la position d'un corps, le poids de chaque molécule élémentaire est toujours le même. Donc la somme de tous les poids élémentaires, qui fait le poids total, est toujours le même.

3° *Dans un corps pesant, il y a toujours un point unique où se coupent les directions de la résultante de tous les poids élémentaires, quelque situation qu'on donne au système; c'est-à-dire, que l'inclinaison du corps, par rapport à la direction verticale, étant supposée telle qu'on voudra, il y aura toujours un point où se couperont les directions de la résultante de tous les poids élémentaires.* Car puisque tout corps pesant doit être regardé comme un système de corpuscules sollicités

par des forces parallèles, il aura néceſſairement (*Num.* XLV.) un *centre* de ces forces parallèles, c'eſt-à-dire, un point où ſe couperont les directions de la réſultante de tous les poids élémentaires, quelle que ſoit la ſituation du corps par rapport à ces directions. Ce point eſt ce qu'on appelle *le centre de gravité.*

4° *Si l'on veut n'employer qu'une puiſſance pour mettre en équilibre & ſoutenir un corps peſant, de manière qu'il ne puiſſe prendre du mouvement en aucun ſens, il faudra que la direction de cette puiſſance ſoit verticale, & de plus qu'elle paſſe par le centre de gravité du corps.* Car, pour l'équilibre, il faut que la réſultante de tous les poids élémentaires dont le corps eſt compoſé, ſoit détruite par une force égale & qui agiſſe dans la même ligne que cette réſultante. Or cette réſultante agit néceſſairement ſuivant la ligne verticale menée par le centre de gravité. Donc la puiſſance propre à la détruire, agira en ſens oppoſé ſuivant la même ligne.

On voit par là que ſi un corps *A* (*Fig.* 32.) eſt ſoutenu en équilibre par une corde *ba*, la direction prolongée de cette corde paſſera évidemment par le centre de gravité *G*.

5° *On peut ſuppoſer que tout le poids d'un corps réſide à ſon centre de gravité; ou, ce qui eſt la même choſe, tous les poids élémentaires qui*

forment le corps, ne produisent pas d'autre effet, que celui que produiroit un seul poids égal à leur somme & placé au centre de gravité du corps. En effet, plusieurs puissances parallèles qui agissent sur un système de corps, produisent le même effet que produiroit leur résultante : or les poids élémentaires sont des puissances parallèles dont la résultante vaut le poids total & passe toujours par le centre de gravité : donc ces poids élémentaires distribués dans toute l'étendue du corps, produisent précisément l'effet que produiroit le poids total placé au centre de gravité.

6° *Le centre commun de gravité de deux corps* A & B (*Fig.* 33.), *se trouve toujours placé dans la ligne droite qui joint leurs centres particuliers de gravité* a, b. En effet, on peut concevoir les poids de deux corps, comme deux forces parallèles appliquées à leurs centres de gravité *a*, *b*. Or le centre commun de deux forces parallèles appliquées constamment aux mêmes points d'un système, se trouve dans la droite qui joint ces points d'application. Cela est évident par ce que nous avons dit (*Num.* XLV.). Donc le centre de gravité des corps *A* & *B* sera dans quelque point *c* de la ligne *ab*.

7° On pourra trouver combien le centre commun de gravité est éloigné des centres particuliers des deux corps, en faisant cette proportion : *La somme des deux poids* A, B *est à la distance* ab

de leurs centres particuliers de gravité, comme l'un de ces poids est à la distance comprise entre le centre de l'autre & le centre commun. Car la résultante des poids A, B vaut la somme $A+B$ de ces poids, & passe par le point e, centre commun de gravité. Or, deux forces parallèles & leur résultante sont entr'elles, chacune comme la partie d'une ligne comprise entre les directions des deux autres (*Num.* XXVIII.). Donc $A+B : ab :: A : be :: B : ae$.

8° *Soient plusieurs corps pesants* A, B, C, D, (*Fig.* 34.), *dont les centres de gravité* a, b, c, d, *soient disposés dans une même ligne droite : leur centre commun de gravité* G *sera aussi dans la même ligne. De plus, la résultante de tous les poids sera* A + B + C + D, *& son moment, par rapport à un point quelconque* E, *pris dans la même ligne, sera égal à la différence des moments qu'ont les poids qui tendent à faire tourner en sens opposés.* On aura donc $(A+B+C+D) \times EG = C \times Ec + D \times Ed - A \times Ea - B \times Eb$; d'où l'on tire

$$EG = \frac{C \times Ec + D \times Ed - A \times Ea - B \times Eb}{A+B+C+D}.$$

9° *Si l'on a tant de corps qu'on voudra, dont les centres de gravité soient dans une même ligne droite, les moments des corps de part & d'autre du centre commun de gravité, pris par rapport à*

ce

ce point, seront égaux entr'eux. Car supposons que le point E (*Fig.* 34.) coïncide avec le point G : dans l'équation que nous venons de trouver, nous aurons $EG = 0$; & par conséquent $C \times Ec + D \times Ed - A \times Ea - B \times Eb = 0$, ce qui donne $C \times Ec + D \times Ed = A \times Ea + B \times Eb$.

10° Soient plusieurs poids A, B, C, D (*Fig.* 35.), dont les centres de gravité a, b, c, d soient placés, si l'on veut, dans différents plans, & dont le centre commun de gravité soit le point G. *La résultante de tous ces poids qui passe par le point* G, *sera* A + B + C + D; *& son moment par rapport à un plan quelconque* EF, *sera égal à la différence des moments qu'ont les poids placés de part & d'autre du plan.* Car supposons que tout le systême soit disposé de manière que le plan EF soit vertical & parallèle à la direction de la gravité qui sollicite les poids dont il s'agit, & menons sur ce plan les perpendiculaires aa', bb', cc', dd', Gg'; on aura évidemment (*Num.* XXXVIII.), $\overline{A+B+C+D} \times Gg' = A \times aa' + B \times bb' - C \times cc' - D \times dd'$.

Donc le centre de gravité G sera éloigné du plan EF d'une quantité

$$Gg' = \frac{A \times aa' + B \times bb' - C \times cc' - D \times dd'}{A + B + C + D}$$

11° *Si un plan passe par le centre commun de gravité de tant de corps qu'on voudra, les corps*

placés de part & d'autre de ce plan, auront, par rapport à lui, des moments égaux. Car si l'on suppose que le plan EF passe par le point G, on aura dans l'équation précédente $Gg'=0$, ce qui donnera $A\times aa'+B\times bb'-C\times cc'-D\times dd'=0$; d'où l'on tire $A\times aa'+B\times bb'=C\times cc'+D\times dd'$. Il est évident que la démonstration seroit la même, quand on supposeroit un plus grand nombre de corps.

On voit par là que si un corps pesant est coupé par un plan qui passe par le centre de gravité, *les moments de tous les corpuscules élémentaires situés d'un côté du plan, seront égaux aux moments des corpuscules situés de l'autre côté.* Car ces corpuscules peuvent être considérés comme autant de poids qui font effort suivant des directions parallèles.

12° Si les quantités A, B, C, D, au lieu de désigner les poids de plusieurs corps, désignoient ceux de plusieurs surfaces dont les centres particuliers de gravité fussent a, b, c, d, & dont le centre commun de gravité fût G, on auroit encore les équations précédentes. Donc *la différence des moments de ces surfaces, par rapport à un plan* EF, *est égale au moment d'une surface* $A+B+C+D$, *dont le centre de gravité seroit aussi en* G.

L X V.

Problème I. *Déterminer par expérience le centre de gravité d'un corps.*

SOLUTION. Suſpendez ce corps par un cordon qui le ſoutienne ſucceſſivement par deux points différents. Les directions prolongées du cordon paſſeront l'une & l'autre par le centre de gravité, (*Num.* LXIV.). Donc le centre de gravité ſe trouvera au point où ſe couperont ces directions prolongées.

Si le corps étoit trop conſidérable pour pouvoir être ainſi ſuſpendu, on en feroit un autre ſemblable & plus petit. On détermineroit le centre de gravité dans celui-ci, comme nous venons de dire; ce qui feroit connoître proportionnellement la poſition du centre de gravité dans le grand corps.

On appelle ligne de *direction*, la verticale qui paſſe par le centre de gravité d'un corps.

LXVI.

REMARQUE. Le centre de gravité des corps n'eſt pas toujours le même que leur centre de *volume*. Il peut arriver que la denſité ſoit différente dans les différentes parties d'un corps propoſé. Qu'un globe, par exemple, ſoit compoſé de deux hémiſphères, l'un d'or & l'autre d'argent. Alors le centre de gravité s'éloigne du centre de volume, en ſe portant vers la partie la plus denſe; & l'on ne peut guères déterminer le centre de gravité, que par l'expérience. Mais quand la denſité eſt la même dans toute l'étendue du corps, on peut

ſouvent trouver ce centre fort ſimplement, à l'aide de la géométrie, comme on verra dans les problêmes ſuivants.

LXVII.

PROBLÈME II. *Déterminer le centre commun de gravité de pluſieurs corps* A, B, C, D (*Fig.* 36.), *dont on ſuppoſe qu'on connoiſſe les centres de gravité particuliers* a, b, c, d.

SOLUTION. Imaginons trois plans *FEKL*, *LHIK*, *FLHZ*, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres, & qui comprennent, ſi l'on veut, les corps propoſés dans leur angle ſolide. Soit *G* le centre commun de gravité de ces corps. Puiſque leur poſition eſt donnée, on connoît leur diſtance à chacun des trois plans. Or, pour trouver la diſtance du point *G* à l'un quelconque de ces plans, il ſuffit (*Num.* LXIV.) de diviſer les moments des corps rapportés à ce plan, par la ſomme des corps. On connoîtra donc aiſément la diſtance du point *G* à chacun des trois plans.

Cela poſé, pour déterminer le point *G*, prenons ſur l'interſection *LH* une partie *LM* égale à la diſtance de *G* au plan *FEKL*. Prenons de même ſur l'interſection *LF* la partie *LN* égale à la diſtance de *G* au plan *LHIK*. Par les points *M*, *N*, menons les lignes *MO*, *NP* parallèlement aux interſections *LF*, *LH*; & par le point *G'* où elles ſe coupent, tirons perpendiculairement au plan

FLHZ, une ligne *G′G* égale à la distance connue de ce plan au centre de gravité. Elle se terminera au point *G* qu'il s'agit de déterminer.

En effet, il est évident que le point *G* est éloigné du plan *FEKL*, d'une quantité égale à la ligne $NG' = LM$, & que le même point *G* est éloigné du plan *LHIK*, d'une quantité égale à la ligne $MG' = LN$.

LXVIII.

REMARQUE. On peut aussi résoudre le problème précédent de la manière suivante:

1° Menons la ligne *ab* (*Fig.* 37.), & prenons sur cette ligne la partie *af* déterminée par la proportion $A + B : ab :: B : af$: le point *f* (*Num.* LXIV.) sera le centre commun de gravité des poids *A* & *B*.

2° Au lieu des poids *A*, *B*, nous pouvons en prendre un seul égal à leur somme, & le supposer placé au point *f*. Menant ensuite la ligne *fc*, nous trouverons le point *h*, centre commun de gravité des trois premiers corps *A*, *B*, *C*, en faisant la proportion $A + B + C : fc :: C : fh$.

3° Supposant ces trois poids réunis au point *h*, & menant la ligne *hd*, on trouvera dans cette ligne le point *g*, centre commun des quatre corps *A*, *B*, *C*, *D*, en faisant la proportion $A + B + C + D : hd :: D : hg$.

On procéderoit de même pour trouver le centre

commun de gravité d'un plus grand nombre de corps.

LXIX.

PROBLÊME III. *Trouver le centre de gravité d'une ligne droite.*

SOLUTION. Trouvez le milieu de cette ligne: ce sera évidemment le centre de gravité. Car si l'on conçoit qu'une ligne droite *AB* (*Fig.* 38.), soit chargée dans toute sa longueur de pondufcules égaux & indéfiniment petits, deux pondufcules quelconques *a*, *b*, pris de part & d'autre à égale distance du milieu *C* de la ligne, se feront équilibre. Donc la partie *AC* fera équilibre à la partie *BC*, & la ligne suspendue par le point *C*, ne prendra aucun mouvement.

LXX.

PROBLÊME IV. *Trouver le centre de gravité du périmètre d'un polygone.*

SOLUTION. Soit, par exemple, un pentagone *ABCDE* (*Fig.* 39.). Le centre de gravité de chaque côté sera dans le milieu de ce côté (*Num.* LXIX.). On pourra donc considérer les cinq côtés du pentagone, comme cinq poids proportionnels à leur longueur, & placés au milieu de chacun; & l'on trouvera leur centre commun de gravité par le problême II. (*Num.* LXVII & LXVIII.).

LXXI.

Problème V. *Trouver le centre de gravité d'une surface triangulaire.*

Solution. Soit le triangle *ABC* (*Fig.* 40.), dont on demande le centre de gravité. Des angles *A* & *B* menez les lignes *AD*, *BE*, qui coupent en parties égales les côtés opposés à ces angles. Le point *G* où se coupent ces lignes, sera le centre de gravité du triangle.

En effet, si l'on conçoit le triangle comme composé d'une infinité d'éléments parallèles à la ligne *BC*, chacun de ces éléments aura son centre de gravité dans la ligne *AD*, & par conséquent si l'on suspend le triangle par le point *A*, de manière que la ligne *AD* soit verticale, il y aura équilibre. Donc le centre de gravité se trouve dans la ligne *AD*, De même, si l'on conçoit le triangle comme composé d'une infinité d'éléments parallèles à la ligne *AC*, ils auront chacun leur centre de gravité dans la ligne *BE*; & par conséquent si on suspend le triangle par le point *B*, de manière que la ligne *BE* soit verticale, il y aura encore équilibre. Donc le centre de gravité se trouve aussi dans la ligne *BE*. Mais il ne peut pas être en même tems dans les lignes *AD* & *BE*, à moins qu'il ne soit dans leur intersection *G*. Donc, &c.

Au reſte, on peut obſerver que la partie $AG = \frac{2}{3} AD$. Car ſi l'on mène la ligne DE, elle ſera parallèle à la ligne AB, puiſqu'elle coupera en parties égales les côtés AC & BC. De plus, les triangles ABG, DEG, étant ſemblables, leurs côtés correſpondants donneront la proportion $AB : DE :: AG : GD$; & puiſque $AB = 2DE$, on aura $AG = 2DG$. Donc $AG = \frac{2}{3} AD$.

LXXII.

PROBLÈME VI. *Trouver le centre de gravité d'une ſurface polygonale quelconque.*

SOLUTION. Soit un pentagone $ABCDE$, (*Fig.* 39.). Diviſez ſa ſurface en triangles EAB, EBC, ECD, dont vous déterminerez les centres de gravité par le problème V. Conſidérez enſuite chaque triangle comme un poids placé à ſon centre de gravité & proportionnel à ſa ſurface. Vous trouverez aiſément le centre commun de gravité de tous les triangles qui compoſent le polygone, en employant les méthodes expliquées (*Num*, LXVII & LXVIII.).

LXXIII.

PROBLÈME VII. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.*

SOLUTION. Soit la pyramide triangulaire $ABCD$ (*Fig.* 41.). Des angles A & B menons

les deux lignes *AH* & *BH* au milieu du côté *CD*. Le centre de gravité du triangle *BCD* sera le point *E* situé aux deux tiers de *BH* (*Num.* LXXI.), & le centre de gravité du triangle *ACD* sera le point *F*, situé aux deux tiers de *AH*. Menons de l'angle *A* la ligne *AE*, & de l'angle *B* la ligne *BF*. Ces lignes étant dans un même plan, se couperont en un point *G* qui sera le centre de gravité de la pyramide.

En effet, on peut concevoir la pyramide comme composée d'une infinité d'éléments triangulaires qui auroient chacun une épaisseur infiniment petite, qui seroient tous parallèles au triangle *BCD*, & qui iroient en décroissant jusqu'au point *A*. Le centre de chacun de ces éléments se trouvera dans la ligne *AE*. Donc si l'on suppose la pyramide suspendue par le point *A*, de manière que la ligne *AE* soit verticale, chaque élément triangulaire de de la pyramide sera en équilibre, & par conséquent il y aura équilibre dans la pyramide entière. Donc le centre de gravité sera dans la ligne *AE*.

On démontrera de même, qu'il y aura équilibre, en supposant la pyramide suspendue par le point *B*, de manière que la ligne *BF* soit verticale. Donc le centre de gravité sera aussi dans la ligne *BF*. Or il ne peut pas être en même tems dans les lignes *AE* & *BF*, à moins qu'il ne soit précisément au point *G*, où elles se coupent.

On peut voir aiſément que $AG = \frac{3}{4} AE$. Car ſi l'on mène la ligne EF, elle coupera proportionnellement les deux lignes AH & BH. Donc elle ſera parallèle à la ligne BA, & on aura les deux triangles ſemblables AGB, EGF, dont les côtés homologues donneront la proportion $AB : EF :: AG : EG$. Or il eſt évident que $AB = 3\,EF$; Donc $AG = 3\,EG$, & par conſéquent $AG = \frac{3}{4} AE$.

LXXIV.

Problème VIII. *Trouver le centre de gravité d'un ſolide quelconque terminé par des ſurfaces planes.*

Solution. Tout corps terminé par des ſurfaces planes, peut ſe décompoſer en pyramides triangulaires. On peut trouver par le problême précédent, le centre de gravité de chacune de ces pyramides, & ſuppoſer ſon poids entier réuni dans ce centre. On aura donc pluſieurs poids dont on connoîtra les centres de gravité en particulier, & l'on pourra trouver le centre commun. (*Num.* LXVII. & LXVIII.)

Je me borne à la ſolution des problèmes précédents. On peut voir dans d'autres ouvrages, en particulier dans les Cours de Meſſieurs *Boſſut* & *Bezout*, une méthode très-générale & très-ſimple pour trouver les centres de gravité, par le moyen du calcul intégral.

LXXV.

pour conclure de ce que nous avons démon-
tré ici, qu'un corps [illegible] de gravité est soutenu par une force qui [illegible] de descendre. Car alors la résistance [illegible] points [illegible] le corps est [illegible] détruite par une force contraire, & par [illegible] le corps ne pourra prendre aucun mouvement.

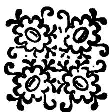
[illegible] pour cela qu'un corps soutenu par un plan [illegible] ne tombera point, si la ligne de direc- [illegible] par quelque point de la base; car [illegible] la résultante qui agit suivant cette ligne, [illegible] décomposée en d'autres forces parallèles, [illegible] par des points où le corps & le plan se touchent.

Ainsi, par exemple, pour être solidement [illegible], pourvu que les pierres [illegible] liées, la ligne de direction du mur, ou [illegible] de tout l'édifice, ne sorte point hors de [illegible].

[illegible] personnes qui ont un gros ventre, se ren[illegible] naturellement en arrière, parce que sans [illegible] le centre de gravité trop en avant les mettroit en danger de tomber sur le [illegible] crocheteur, au contraire, qui porte un fardeau sur le dos, se courbe en avant, parce

que ſa charge & lui ont un centre de gravité commun, qui le plus ſouvent ſe trouve placé hors du porteur, & qui ne ſeroit point ſoutenu, s'il marchoit droit. Il faut donc de néceſſité qu'il ſe penche, juſqu'à ce que ce centre ſe trouve dans une ligne verticale qui paſſe entre ſes deux pieds.

Lorſqu'un homme marche, il porte alternativement ſon corps ſur le côté droit & ſur le côté gauche. S'il veut ſe tenir debout ſur une jambe, il eſt obligé de faire un mouvement de côté, pour mettre le corps perpendiculairement ſur celui des deux pieds qui doit le ſoutenir; s'il veut ſe baiſſer en portant la tête en avant, il porte néceſſairement en arrière la partie oppoſée, pour entretenir l'équilibre entre l'une & l'autre; & voilà pourquoi l'on ne peut ſe tenir ſur un ſeul pied, ni rien ramaſſer devant ſoi en ſe baiſſant, lorſque l'on a immédiatement à côté & derrière ſoi un mur ou un arbre qui empêche les mouvements qu'il faut faire pour maintenir le centre de gravité dans la ligne de direction qui paſſe au point d'appui.



ARTICLE III.

De l'Équilibre des Machines.

LXXVI.

On donne le nom de *machine* à tous les inſtruments par le moyen deſquels ſe tranſmet l'action des forces. Les machines ſont *compoſées* ou *ſimples*, ſuivant qu'elles réſultent ou ne réſultent pas de la combinaiſon de pluſieurs autres. Il y a une infinité de machines compoſées, & le nombre s'en accroît tous les jours. Mais le nombre des machines ſimples eſt très-borné. Quelques auteurs en comptent ſept, d'autres ſix, d'autres cinq, d'autres trois. Il y en a même qui prétendent que toutes les machines peuvent ſe réduire au levier. Quoi qu'il en ſoit, nous traiterons ici en particulier de la *machine funiculaire*, du *levier*, de la *poulie*, du *tour*, du *plan incliné*, de la *vis* & du *coin*. Cela nous donnera lieu de parler auſſi de quelques autres machines, qui ne ſont que des combinaiſons très-ſimples des précédentes.

SECTION I.

De la Machine Funiculaire.

LXXVII.

On appelle *machine funiculaire*, celle où l'on n'employe que des cordes pour ſoutenir un poids,

ou pour contrebalancer des puissances. Je ferai précision du poids des cordes, jusqu'à ce que j'avertisse expressément que j'en tiens compte.

LXXVIII.

PROBLÈME I. *Déterminer les conditions de l'équilibre de trois puissances* P, Q, S (Fig. 42.), *qui agissent par le moyen de trois cordons qu'assemble un nœud fixe* A.

SOLUTION. Il est évident que si l'une des puissances, par exemple *P*, est égale & diamétralement opposée à la résultante *R* des deux autres, il y aura équilibre. Prolongez donc la direction *PA* de la puissance *P*, & prenez sur son prolongement une partie *AD*, égale à la ligne *AE* que je suppose exprimer la puissance *P*. Achevez ensuite le parallélogramme *ABDC*: il faudra, pour l'équilibre, que les puissances *Q*, *S*, soient représentées par les lignes *AB*, *AC*.

En effet, si la puissance *Q* est représentée par *AB*, & la puissance *S* par *AC*, leur résultante sera exprimée par la diagonale *AD*, & sera par conséquent égale & diamétralement opposée à la force *P* qu'on suppose représentée par *AE*. Il est évident que dans tout autre cas les puissances *Q*, *S*, n'auroient pas *AD* pour résultante, & qu'il ne pourroit pas y avoir équilibre.

LXXIX.

Corollaire I. Si les deux cordons *AQ*, *AS* (*Fig.* 43.), au lieu d'être sollicités par deux puissances, étoient attachés à deux points fixes *Q*, *S*, alors *AB* & *AC* représenteroient les efforts supportés par les points fixes, ou les tensions produites dans les deux cordons en conséquence de l'action de la force *P*.

LXXX.

Corollaire II. *Les trois puissances* P, Q, S (Fig. 42.), *dans le cas d'équilibre, sont proportionnelles chacune au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Pour le démontrer, supposons que *R* soit la résultante des puissances *Q*, *S*. On a (*Num.* XIX.), la suite des raisons égales, *R* : sin. *QAS* :: *Q* : sin. *RAS* :: *S* : sin. *QAR*. Mais dans le cas d'équilibre *P* = *R*. D'ailleurs, sin. *RAS* = sin. *PAS*, & sin. *QAR* = sin. *QAP*, parce que le sinus d'un angle vaut celui de son supplément. Donc on aura *P* : sin. *QAS* :: *Q* : sin. *PAS* :: *S* : sin. *QAP*.

LXXXI.

Corollaire III. *Qu'on suppose* (Fig. 44.) *la puissance* P *aussi petite & les puissances* Q, S *aussi grandes qu'on voudra, il y aura toujours un angle au point* A, *pourvu que les trois puissances soient finies.*

Car nous venons de démontrer qu'on a toujours Q : ſin. PAS :: P : ſin. QAS. Dans cette proportion les trois premiers termes ſont des quantités de valeur finie par la ſuppoſition. Donc le quatrième terme ſin. QAS aura néceſſairement une valeur finie. Or tout ſinus dont la valeur eſt finie, eſt le ſinus d'un angle dont la valeur eſt pareillement finie. Donc quelque petite qu'on ſuppoſe la puiſſance P, elle produira un coude au point A.

LXXXII.

COROLLAIRE IV. *Une puiſſance très-petite* P *pourra produire une tenſion conſidérable dans les cordons* AQ, AS, *ſi l'on ſuppoſe que l'angle* QAS *ſoit très-obtus.*

Car ces tenſions Q, S, ſont à la puiſſance P, comme les ſinus des angles PAS, QAP ſont au ſinus de l'angle QAS. Or il eſt viſible que lorſque l'angle QAS eſt très-obtus, les deux angles PAS, QAP peuvent différer peu de l'angle droit, & alors leurs ſinus ſont très-grands par rapport au ſinus de QAS qu'on ſuppoſe très-obtus. Donc auſſi les tenſions ou forces Q, S ſont très-grandes par rapport à la force P.

Ceci peut ſervir à rendre raiſon du phénomène ſuivant. Soient A, B, C, (*Fig.* 45.), des veſſies qui communiquent enſemble par des petits bouts de tuyaux qui ſervent à les joindre. Soit D un poids de

de 30 livres qui repoſe ſur le pied de la machine, quand les veſſies ſont vuides. Si l'on ſouffle de l'air dans ces veſſies par le moyen du tuyau qu'on voit en *E*, elles s'enflent, & le poids s'élève de pluſieurs pouces. On conçoit aiſément que l'air qui s'introduit dans les veſſies, exerce ſon action en tout ſens : il agit donc contre les parois *bb*, *cc*, qu'on peut conſidérer comme un aſſemblage de fibres funiculaires ; & la tenſion qu'il produit dans ces parois, doit ſurpaſſer conſidérablement la force dont il eſt doué lui-même. Il n'eſt donc pas impoſſible que les parois ſe dilatent ſuffiſamment pour ſoulever le poids *D*.

LXXXIII.

PROBLÈME II. *Déterminer les conditions de l'équilibre d'une machine funiculaire, dans laquelle chaque nœud fixe n'aſſemble que trois cordons ſollicités par des puiſſances dont les directions ſont dans le même plan.*

SOLUTION. Soit la machine funiculaire *PABCT* (*Fig.* 46.), dans laquelle chaque nœud n'aſſemble que trois cordons. Soient les puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, appliquées à ces cordons. Soit enfin *a* la tenſion du cordon *AB*, & *b* la tenſion du cordon *BC*. On peut conſidérer ces tenſions comme des puiſſances appliquées à ces cordons.

Cela poſé, il faut & il ſuffit pour l'équilibre de la machine, 1° *que des trois puiſſances appliquées*

aux cordons issus du même nœud fixe, l'une agisse hors de l'angle formé par les directions des deux autres, afin qu'elle puisse être opposée à leur résultante ; 2° que ces trois puissances soient proportionnelles chacune au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres. Ces conditions sont une suite de ce qu'on a démontré (*Num.* LXXVIII. & LXXX.).

On aura donc pour l'équilibre des trois puissances *P*, *Q*, *a*, la suite des raisons égales *P* : sin. *QAB* :: *Q* : sin. *PAB* :: *a* : sin. *QAP*.

De même, l'équilibre des puissances *a*, *b*, *R*, donnera *a* : sin. *RBC* :: *R* : sin. *ABC* :: *B* : sin. *ABR*.

Et pour l'équilibre des puissances *b*, *S*, *T*, on aura *b* : sin. *SCT* :: *S* : sin. *BCT* :: *T* : sin. *BCS*.

Il est évident que les conditions de l'équilibre seroient les mêmes, si les cordons extrêmes, au lieu d'être sollicités par les puissances *P* & *T*, étoient attachés à des points fixes. Dans ce cas, les résistances des deux appuis tiendroient lieu des forces *P*, *T*, & seroient égales aux tensions des deux cordons *AP*, *CT*.

LXXXIV.

COROLLAIRE I. Puisqu'on suppose que les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, appliquées à la machine funiculaire, sont en équilibre, & que cette machine n'a d'elle-même aucune action, il faut que

la résultante des puissances P, T, qui soutiennent les cordons extrêmes, soit égale & diamétralement opposée à la résultante de toutes les autres puissances Q, R, S. Or la résultante des puissances P & T passe nécessairement par le point V où se coupent leurs directions : donc si l'on suppose que cette résultante soit dirigée de V en Z, la résultante des autres puissances sera dirigée de Z en V, & passera par le point V.

LXXXV.

COROLLAIRE II. Supposons à présent que les deux extrémités d'une machine funiculaire (*Fig.* 47.) étant attachées à des points fixes A, F, les directions de toutes les puissances P, Q, R, S, soient parallèles entr'elles.

1° *La résultante des puissances* P, Q, R, S, *sera égale à leur somme* P + Q + R + S, *& leur sera parallèle.* Car la résultante de plusieurs forces parallèles qui agissent dans le même sens, est toujours une force parallèle qui vaut leur somme.

2° *Cette résultante sera égale & diamétralement opposée à la résultante des efforts que supportent les points fixes* A & F. Car ces efforts ou résistances des points fixes produisent le même effet que produiroient deux puissances appliquées aux points A & F, & capables de faire équilibre aux puissances P, Q, R, S : or ces deux puissances

(*Num.* LXXXIV.) auroient une résultante égale & diamétralement opposée à celles des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*.

3° *Les tensions des cordons extrêmes* AB, FE, *que j'appelle* a, f, *étant équivalentes aux forces qui les produisent, & qui sont équilibre aux puissances* P, Q, R, S, *la résultante de ces tensions sera diamétralement opposée à la résultante de ces puissances, & vaudra leur somme.*

4° *La résultante des tensions* a, f, *des cordons extrêmes* AB, FE, *passera par le point* V, *où ces cordons prolongés concourent, & son effet se fera suivant la ligne* VZ, *parallèle à la direction des puissances* P, Q, R, S. Car la résultante de deux puissances dont les directions vont se couper en un point, passe toujours par le point de concours; & de plus, la résultante des tensions des cordons extrêmes *AB*, *FE*, ne doit pas moins être parallèle aux puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, que la résultante de ces puissances, puisque ces deux résultantes agissent nécessairement dans la même ligne.

LXXXVI.

COROLLAIRE III. *Dans une machine funiculaire telle que nous venons de la supposer, la somme des puissances parallèles est à la tension d'un cordon extrême, comme le sinus de l'angle formé par les cordons extrêmes prolongés, est au*

finus de l'angle formé par la direction des puiffances & de l'autre cordon extrême.

En effet, les tenfions a, f, & leur réfultante, font proportionnelles chacune au finus de l'angle compris entre les directions des deux autres. Donc fi nous appelons Z cette réfultante, nous aurons $Z : a :: \text{fin.} AVF : \text{fin.} ZVF$; & $Z : f :: \text{fin.} AVF : \text{fin.} AVZ$. Or, par le corollaire précédent, $Z = P + Q + R + S$, & les angles AVZ, ZVF font les angles que font les cordons extrêmes avec la direction des puiffances parallèles.

LXXXVII.

Corollaire IV. Si l'on attache les extrémités d'une corde parfaitement fléxible ACB (*Fig.* 48.), à deux points fixes A & B, pris dans deux lignes verticales différentes, cette corde prendra, en vertu de la pefanteur de fes parties, une courbure telle qu'on aura toujours la proportion fuivante: *Le poids total de la corde eft à la tenfion de l'une des extrémités* A, *comme le finus de l'angle formé par les tangentes menées aux deux extrémités de la corde, eft au finus de l'angle que fait la verticale avec la tangente menée à l'autre extrémité* F.

Car les pefanteurs de tous les éléments dont la corde eft compofée, peuvent fe confidérer comme autant de puiffances appliquées à la machine funiculaire. Leur réfultante eft évidemment le poids

total de la corde, & cette résultante agit suivant la ligne verticale *Z V*, menée par le point de concours des tangentes *A V*, *B V*, qui sont les directions prolongées des éléments extrêmes de la courbe en *A* & en *B*. Donc (*Num.* LXXXVI.) on doit avoir la proportion suivante : *Le poids total de la corde est à la tension de l'élément extrême* A, *comme le sinus de l'angle* AVB *est au sinus de l'angle* BVZ, *formé par la tangente* BV *& la verticale* VZ.

Les Géomètres ont nommé *chaînette* la courbe *A C B*, suivant laquelle se plie une corde pesante, considérée comme parfaitement fléxible, & suspendue librement à des points fixes pris dans des verticales différentes. Ce que nous venons de démontrer sur la machine funiculaire, sert à déterminer la nature de cette courbe : problême intéressant qui fut résolu, pour la première fois, vers 1690, par MM. *Leibnitz* & *Bernoulli*.

LXXXVIII.

COROLLAIRE V. Supposons encore un polygone funiculaire & régulier *ABDEFG* (*Fig.* 49.), aux angles duquel soient appliquées des puissances égales *H*, *H*, *H*, &c., qui agissent suivant les rayons obliques prolongés.

1° *Tous les côtés du polygone seront également tendus.* Car tout étant égal relativement à chacun

de ces côtés, il n'y a point de raifon pourquoi l'un foit plus ou moins tendu que les autres.

2° *La tenfion de chaque côté fera à la fomme des puiffances qui agiffent du centre à la circonférence, comme le rayon oblique eft au périmètre du polygone.*

Car en appelant a la tenfion du côté AG, nous aurons (*Num.* LXXXIII.) $a : H :: \text{fin.}\ HAB : \text{fin.}\ GAB$. Mais au lieu de fin. HAB, nous pouvons mettre fin. BAC, puifque le finus d'un angle eft égal à celui de fon fupplément. Par la même raifon, au lieu de fin. GAB, nous pouvons mettre fin. ACB, puifque dans un polygone régulier, l'angle au centre eft toujours fupplément de l'angle au périmètre. Notre proportion deviendra donc $a : H :: \text{fin.}\ BAC : \text{fin.}\ ACB$; ou parce que dans un triangle BAC les finus des angles font proportionnels aux côtés oppofés, $a : H :: CB : AB$. Multipliant les deux conféquents par le nombre n des puiffances H, qui eft le même que celui des côtés du polygone, nous aurons $a : n \times H :: CB : n \times AB$; c'eft-à-dire, la tenfion a eft à la fomme des puiffances H, comme le rayon oblique CB eft à la fomme des côtés, ou au périmètre du polygone.

LXXXIX.

CorOLLAIRE VI. La circonférence d'un cercle

n'étant que le contour d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, dont les rayons obliques se confondent avec les rayons droits, si l'on suppose que tous les points de cette circonférence soient pressés perpendiculairement suivant les rayons prolongés, par des forces égales, on pourra conclure que *la tension produite dans chaque élément, sera à la somme de toutes les forces perpendiculaires, comme le rayon est à la circonférence.*

X C.

Je n'entrerai dans aucun détail sur l'équilibre de la machine funiculaire, lorsque les cordons issus du même nœud sont au nombre de plus de trois, dirigés dans un même ou dans différents plans. J'observerai seulement que, dans tous les cas possibles, ayant imaginé trois plans dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & décomposé chacune des forces qui agissent sur un même nœud en trois autres perpendiculaires à ces trois plans, les conditions de l'équilibre seront toujours, que *la somme des forces perpendiculaires à chaque plan, soit zéro.* Il est évident que ces conditions ayant lieu, le nœud sollicité par les puissances, ne pourra s'éloigner d'aucun des trois plans. Il ne recevra donc aucun mouvement en vertu de ces puissances.



SECTION II.

Du Levier.

XCI.

J'ENTENDS ici par *levier* (*Fig.* 50, 51, 52, 53, 54.), une verge inflexible, droite ou courbe, tellement fixée en l'un *E* de ſes points, qu'elle ne puiſſe prendre d'autre mouvement par l'action des forces qui lui ſeroient appliquées, qu'un mouvement de *rotation*, c'eſt-à-dire, un mouvement pour tourner en tous ſens autour du point *E*. Ce point fixe s'appelle le point *d'appui*.

XCII.

COMME l'uſage le plus ordinaire du levier eſt de ſoutenir un poids, à l'aide d'une puiſſance & d'un appui, les différentes poſitions que la puiſſance & le poids peuvent avoir par rapport à l'appui, ont fait diſtinguer trois ſortes de levier : celui de *la première eſpèce* (*Fig.* 50.), dans lequel le point d'appui eſt placé entre la puiſſance & le poids; celui de *la ſeconde eſpèce* (*Fig.* 51.), où le poids ſe trouve entre la puiſſance & le point d'appui; & celui de *la troiſième eſpèce* (*Fig.* 52.), où la puiſſance eſt appliquée entre le poids & l'appui.

XCIII.

THÉORÈME. *Pour que deux puiſſances appli-*

quées à un levier se fassent équilibre, il est nécessaire & il suffit que la direction de leur résultante passe par le point d'appui.

1° Il est évident que cette condition est nécessaire pour l'équilibre. Car tous les points du levier étant mobiles, à l'exception du point d'appui, la résultante ne peut être détruite, à moins qu'elle ne passe par ce point.

2° Il n'est pas moins évident que la condition énoncée suffit pour l'équilibre. Car si la direction de la résultante des deux forces rencontre le point d'appui, cette résultante sera entièrement détruite par la résistance de ce point qu'on suppose immobile. Donc elle ne pourra produire aucun mouvement dans le levier, & par conséquent les deux forces composantes seront en équilibre.

XCIV.

COROLLAIRE I. *Le point d'appui & les directions de deux puissances qui se font équilibre par le moyen du levier, sont nécessairement dans le même plan.*

Car (*Num.* XIV.), les directions de deux puissances composantes & de leur résultante sont toujours dans le même plan. Or nous venons de démontrer que le point d'appui est nécessairement dans la direction de la résultante de deux puissances qui se font équilibre à l'aide du levier. Donc le point

d'appui & les directions de ces puissances sont nécessairement dans le même plan.

X C V.

COROLLAIRE II. *Les deux puissances* P, S (Fig. 53 & 54.), *étant en équilibre à l'aide du levier, si l'on prolonge leurs directions jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point* O, *& qu'on tire ensuite la droite* OE *du point de concours au point d'appui, elle sera la direction de la résultante des deux puissances dont il s'agit.*

Car cette résultante devant passer par le point de concours des puissances & par le point d'appui, ne peut être que la droite menée du point *E* au point *O*.

X C V I.

COROLLAIRE III. *Puisqu'une résultante & ses deux puissances composantes sont proportionnelles chacune au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres, si nous appelons* R *la résultante de* P *&* *de* S (Fig. 53 & 54.), *nous aurons* P : sin. EOS :: S : sin. EOP :: R : sin. POS.

La résultante *R* qui agit contre le point d'appui, exprime évidemment l'effort ou la pression que cet appui supporte.

X C V I I.

COROLLAIRE IV. *Deux puissances en équilibre*

à l'aide d'un levier, ont des moments égaux par rapport au point d'appui.

Car (*Num.* XXVII.), les moments de deux puiſſances compoſantes, par rapport à un point pris dans la direction de leur réſultante, ſont égaux. Or le point d'appui eſt un point qui ſe trouve toujours dans la direction de la réſultante des deux puiſſances en équilibre à l'aide du levier.

Donc ſi l'on mène du point d'appui (*Fig.* 5 & 54.), les perpendiculaires EF, EH, ſur les directions des puiſſances, on aura $P \times EF = S \times EH$, d'où ſuit la proportion $P : S :: EH : E$ qui nous apprend que *deux puiſſances en équili à l'aide d'un levier, ſont en raiſon inverſe d perpendiculaires abaiſſées du point d'appui ſ leurs directions.*

XCVIII.

CoROLLAIRE V. *Si les deux puiſſances* P, S (Fig. 55 & 56.), *en équilibre à l'aide d'un levi droit, ſont parallèles, elles ſeront entr'elles raiſon inverſe des parties du levier compriſes en le point d'appui & les points où elles ſont appliquées.*

Car ſi par le point d'appui on tire perpendiculairement aux directions des puiſſances la ligne FEH (*Fig.* 55.), ou EFH (*Fig.* 56.), on aura les triangles AEF, BEH, qui, à cauſe des parallèles, ſeront ſemblables. Donc $BH : EF$

ꞏ : *EA* : or *EH* : *EF* :: *P* : *S*, par le co-
: précédent; donc *P* : *S* :: *EB* : *EA*.

XCIX.

ꞏOLLAIRE VI. *De toutes les puissances peut appliquer à un point* B *d'un levier* (Fig. 57 & 58.), & *qui sont capables cha-* :*n particulier de faire équilibre à une puis- donnée* P, *la plus petite est la puissance* S *git perpendiculairement au levier.*

ır le démontrer, prenons une puissance *S* qui obliquement au levier, & menons du point ıi sur sa direction, ainsi que sur celle de la nce *P*, les perpendiculaires *EH*, *EF*. On (*Num.* XCVII.) que la puissance *S* étant en bre avec la puissance *P*, on doit avoir *S*×*EB* × *EF*. Par la même raison *S'* faisant équilibre uissance *P*, on doit avoir *S'*×*EH*=*P*×*EF*. : *S*×*EB*=*S'*×*EH*; d'où l'on tire la pro- on *S* : *S'* :: *EH* : *EB*. Or la ligne *EH* est petite que *EB*, parce que la perpendiculaire ılus courte que l'oblique menée du même point a même ligne. Donc aussi la puissance *S* sera petite que *S'*.

C.

OROLLAIRE VII. *Quand deux puissances se équilibre par le moyen d'un levier, le moment eur résultante, par rapport à un point pris*

dans la direction de l'une de ces puissances, est égal au moment de l'autre puissance relativement au même point.

Ce corollaire est évident par ce que nous avons dit (*Num.* XXVI.).

Donc si d'un point *B* (*Fig.* 59 & 60.) pris dans la direction de la puissance *S*, on abaisse les lignes *BF*, *BG*, perpendiculaires aux directions de l'autre puissance *P* & de la résultante *R*, on aura $R \times BG = P \times BF$. Ainsi $R : P :: BF : BG$; c'est-à-dire, *la résultante & l'une des puissances qui sont en équilibre par le moyen du levier, sont entr'elles en raison inverse des perpendiculaires menées sur leurs directions, d'un point pris dans la direction de l'autre puissance.*

C I.

COROLLAIRE VIII. *Le levier dont se sert une puissance pour mettre un poids en équilibre, favorise la puissance, ou est à son désavantage, selon que la direction de la puissance est plus ou moins éloignée du point d'appui que celle de la résistance.*

Car (*Num.* XCVII.), la puissance & le poids qui se font équilibre, sont en raison inverse des perpendiculaires tirées du point d'appui sur leurs directions: or ces perpendiculaires sont les distances du point d'appui aux directions de la puissance & du poids: donc la puissance & le poids sont en raison inverse des distances du point d'appui à leurs

lirections; & par conséquent si la direction de la puissance est plus éloignée de l'appui que celle du poids, il faudra, pour l'équilibre, que la puissance soit moindre que le poids: ainsi le levier favorisera la puissance. Au contraire, si la direction de la puissance est moins éloignée du point d'appui que celle du poids, il faudra, pour l'équilibre, que la puissance soit plus grande que le poids: ainsi la puissance aura du désavantage. Le levier ne favoriseroit ni la puissance, ni la résistance, si l'appui étoit également éloigné de leurs directions.

Le levier de la première espèce peut donc favoriser la puissance, ou être à son désavantage; parce que dans ce levier l'appui peut être plus ou moins éloigné de la direction de la puissance que de celle de la résistance. On voit de même, que dans le levier de la seconde espèce, la puissance a toujours de l'avantage, & qu'elle a un désavantage réel dans le levier de la troisième espèce. Ce dernier levier seroit donc mal employé dans le cas où il s'agit de mettre la force motrice en état de soutenir ou de surmonter une force plus grande qu'elle-même.

C I I.

PROBLÈME I. *Deux puissances étant en équilibre à l'aide d'un levier quelconque, & trois de ces six choses étant données, les deux puissances, la charge de l'appui & les angles formés par leurs*

directions, trouver les trois autres ; pourvu qu'on ait parmi les choses données, une des puissances ou la charge de l'appui.

SOLUTION. La charge de l'appui n'étant que la résultante des deux puissances, il est évident que le problème se résout par la méthode expliquée (*Num.* XLI.).

CIII.

PROBLÈME II. *Dans un levier droit de la première espèce, de ces quatre choses, la longueur du levier, la distance du point d'appui à l'une des extrémités du levier, les deux poids attachés aux extrémités du levier qu'ils sollicitent suivant des directions parallèles, trois étant connues, trouver la quatrième.*

SOLUTION. Soient les deux poids P, S (*Fig.* 61.), qui se font équilibre par le moyen du levier AB. Soit AE la distance du point d'appui à l'extrémité A. On a (*Num.* XCVIII.), $P : S :: BE : AE$. Donc $P \times AE = S \times BE$, ou $P \times AE = S \times \overline{AB - AE}$, ou enfin $P \times AE = S \times AB - S \times AE$. Cette équation ne contient que les quatre quantités dont il est question dans le problème. Donc si l'on en connoît trois, on trouvera la quatrième en résolvant l'équation.

Supposons, par exemple, $P = 30$ £, $S = 20$ £, $AB = 5$ pieds; l'équation sera $30 \times AE = 20 \times 5 - 20 \times AE$.

$-20 \times AE$. Donc $50\,AE = 100$, & la ligne $AE = \frac{100}{50} = 2$ pieds.

C I V.

PROBLÊME III. *Dans un levier droit de la seconde ou de la troisieme espèce, de ces quatre choses, la puissance, le poids, la distance du point d'appui à la puissance, la distance du même point d'appui au poids, trois étant données, trouver la quatrième, en supposant parallèles les directions du poids & de la puissance.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 51 & 52), la puissance S & le poids P qui se faisant équilibre au moyen du levier. Nous avons (*Num.* XCVIII), $P : S :: EB : EA$. Donc $P \times EA = S \times EB$. Cette équation ne contient que les quatre quantités dont il est question dans le problème proposé, & & par conséquent si l'on en connoît trois, on aura la quatrième en résolvant l'équation.

C V.

PROBLÊME IV. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent dans le même plan, par le moyen d'un levier auquel elles sont appliquées.*

SOLUTION. La seule condition nécessaire pour l'équilibre de ces puissances, est *que les momens de celles qui tendent à faire tourner dans un sens autour du point d'appui, moins les momens de*

celles qui tendent à faire tourner en sens opposé, soient zéro. Car on peut regarder le levier auquel les puissances sont appliquées, comme un plan peu étendu en largeur & sollicité par ces puissances. Or (*Num.* LIII.), quand plusieurs puissances agissent dans un plan qui ne peut recevoir qu'un mouvement de rotation autour d'un point fixe, il ne faut, pour l'équilibre, que la condition que nous avons assignée.

C V I.

PROBLÈME V. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, appliquées à un levier d'une figure quelconque, suivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Ayant imaginé trois plans dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & qui aient l'appui du levier pour point commun, que l'on décompose chaque puissance en trois autres, dont chacune agisse dans l'un de ces plans. Cela posé, *il faut & il suffit pour l'équilibre, qu'en prenant les puissances qui agissent dans chacun des trois plans, la différence de leurs moments, par rapport au point d'appui, soit zéro.* Car on peut considérer le levier comme un système de corps qui ne peut recevoir qu'un mouvement de rotation autour d'un point fixe, & qui est soumis à l'action de plusieurs puissances dirigées comme on voudra. Or, nous avons démontré (*Num.* LVIII.), que la condition que

nous assignons ici, étoit nécessaire & suffisant pour l'équilibre d'un tel système.

CVII.

Remarque. Jusqu'à présent nous avons négligé le poids du levier : mais il est aisé d'y avoir égard au moyen des deux derniers problèmes. Il suffit pour cela de considérer ce poids comme une puissance appliquée au centre de gravité, & d'en prendre le moment par rapport au point d'appui, comme on prend celui des autres puissances.

CVIII.

Problème VI. *Dans un levier de la seconde espèce* (Fig. 62.), *de ces six choses, la puissance* S, *la résistance* P, *le poids du levier* R, *les distances* EB, EA, EC *de l'appui aux directions de ces forces, cinq étant données, trouver la sixième.*

Solution. Nous aurons (*Num.* CV.), l'équation suivante : $P \times EA + R \times EC - S \times EB = 0$, qui ne contient que les six quantités désignées dans l'énoncé du problème. On suppose qu'on en connoît cinq. Il suffira donc de résoudre l'équation pour trouver la sixième.

Supposons, par exemple, $EB = 20$ pieds, $EC = 10$ pieds, $EA = 4$ pieds, la résistance $P = 40$ £, le poids du levier $R = 2$ £ ; & cherchons la puissance S, capable de mettre le système en équilibre. L'équation précédente deviendra $40 \times 4 + 2 \times 10$

$-20 \times S = 0$; donc on aura $180 = 20 S$, ou $S = 9$ £. La puiſſance S devra donc être équivalente à un poids de 9 £.

Si l'on n'avoit pas eu égard au poids du levier, on auroit trouvé $S = 8$ £.

C I X.

PROBLÈME VII. *Trouver la longueur du même levier* EB (Fig. 62.), *quand on connoît ſa gravité ſpécifique, la puiſſance verticale* S, *la réſiſtance* P *& la diſtance* EA *du point d'appui à ſa direction.* Je ſuppoſe le levier diſpoſé horizontalement, d'une groſſeur & d'une peſanteur uniforme dans toute ſa longueur.

SOLUTION. Nommons x le nombre de pieds que le levier comprend dans ſa longueur, g ce que pèſe chaque pied; le poids total R ſera gx, qu'on pourra conſidérer comme une puiſſance appliquée au milieu C du levier, à la diſtance $EC = \frac{1}{2}x$ du point d'appui. Cela poſé, nous aurons (*Num.* CV.), $P \times EA + gx \times \frac{1}{2}x - S \times x = 0$, équation du ſecond degré, qui donne

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 2Pg \times EA.}}{g}$$

Si l'on ſuppoſe, par exemple, $S = 10$ £, $g = 1$ £, $P = 21$ £, $EA = 2$ pieds, on trouvera $x = 10 \pm \sqrt{16}$; c'eſt-à-dire, que la puiſſance S ſera équi-

libre au poids *P*, en supposant la longueur du levier de 14 ou de 6 pieds.

C X.

REMARQUE I. La *balance ordinaire* (*Fig.* 63.), est une machine qui sert à mettre en équilibre deux quantités égales de matière, de sorte que si l'on connoit le poids de l'une, on sait, par ce moyen, ce que pèse l'autre. Cette machine est composée d'un levier droit *AB*, nommé *fléau* ou *traversin*, aux extrémités duquel sont suspendus deux bassins *F* & *G*, qui reçoivent les marchandises qu'on veut peser. Le fléau porte dans son milieu un axe xy qui lui est perpendiculaire, & dont les extrémités entrent & tournent librement dans des yeux pratiqués aux deux montans d'une châsse qui soutient la machine. Le même fléau porte une aiguille fg, qui est dans la châsse quand il y a équilibre & que le fléau est horizontal, & qui, en s'écartant à droite ou à gauche de la châsse par sa partie supérieure, fait connoître non seulement en quel sens le fléau s'est incliné, mais encore les plus petites inclinaisons dont il peut être affecté.

Pour qu'une balance ait la perfection qu'on peut désirer, elle doit avoir principalement trois qualités. 1° Elle doit être bien mobile autour de l'axe qui sert de point d'appui; autrement on pourroit mettre dans les bassins des poids inégaux, sans faire

trébucher le traverſin. 2° Il eſt eſſentiel que les deux bras de la balance ſoient égaux : car s'ils étoient inégaux, le plus long favoriſeroit le poids placé de ſon côté. 3° Il faut que l'axe & les deux extrémités du fléau ſoient, autant qu'il eſt poſſible, dans une même ligne droite; autrement les directions des poids que l'on veut contrepeſer, ne ſeroient plus à égale diſtance de l'appui, pour peu que le fléau fût incliné à l'horizon.

C X I.

Remarque II. La *romaine* ou le *peſon* (*Fig.* 64), eſt encore un levier de la première eſpèce, qui ſert à peſer des marchandiſes de différentes peſanteurs, par le moyen d'un ſeul & même poids qu'on éloigne plus ou moins du point d'appui. Cette machine eſt compoſée d'un fléau *AB*, ſuſpendu par une anſe *EK* qui le diviſe en deux bras *EA*, *EB* fort inégaux. Le bras le plus court porte un baſſin *F*, ou un crochet deſtiné à ſoutenir les marchandiſes qu'on veut peſer; & on fait couler, au moyen d'un anneau, le long du bras *EB*, le poids conſtant *P* qui doit leur faire équilibre. On voit (*Num.* XCVIII.), que le même poids *P* doit contrebalancer une charge d'autant plus conſidérable, qu'il ſera plus éloigné du point d'appui. Quant à la manière dont on doit s'y prendre pour graduer convenablement le bras *EB* de la

romaine, voyez la Méchanique de M. l'Abbé *Bossut*.

CXII.

Les leviers sont d'un usage si commun, non seulement dans les arts, mais même dans la vie civile & dans le méchanisme de la nature, qu'on les rencontre presque par-tout, pour peu qu'on y fasse attention. Les ciseaux, les pinces, les pincettes, les tenailles, ne sont que des leviers assemblés par paires. L'effort de la main ou des doigts qui meuvent les deux branches, doit être considéré comme la puissance; le clou, ou ce qui en tient lieu, est un point d'appui commun aux deux leviers; & ce que l'on coupe, ou ce que l'on serre, devient la résistance. Les rames des bateliers sont des leviers de la seconde espèce, dont on appuie un bout contre l'eau, pendant que la puissance appliquée à l'autre bout porte son effort à l'endroit du bateau où la rame est attachée. Le couteau du Boulanger est encore un levier de la même espèce, lorsqu'arrêté par un bout sur une table, & tournant autour d'un point fixe, il est porté par la main qui tient le manche, contre un pain qu'il entame. On peut remarquer des leviers de la troisième espèce dans certains rouets à filer, dans la machine du Rémouleur ou Gagne-petit, dans les métiers à toiles, à draps & autres étoffes, dans les bras, les doigts, les jambes des animaux, &c.

SECTION III.

De la Poulie.

CXIII.

La *poulie* (*Fig.* 65 & 66.), n'eſt autre choſe qu'une roue creuſée extérieurement à ſa circonférence en forme de gorge, pour recevoir une corde tirée de part & d'autre par deux puiſſances. Elle eſt traverſée à ſon centre perpendiculairement par un axe dont les extrémités tournent dans les branches d'une *anſe* ou *chappe*. L'axe autour duquel tourne la poulie, s'appelle *goujon*, *tourillon*, *boulon*.

CXIV.

La poulie peut être *fixe* ou *mobile*. La poulie fixe (*Fig.* 65.), eſt celle qui ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de ſon axe. La poulie mobile (*Fig.* 66.), eſt celle qui monte ou deſcend avec le poids que ſoutiennent les puiſſances. Dans celle-ci, le poids *R* eſt attaché à la chappe, comme on le voit dans la figure.

CXV.

Théorème I. *Pour que deux puiſſances appliquées à une poulie fixe ſoient en équilibre, il eſt néceſſaire & il ſuffit que la direction de leur réſultante paſſe par le centre de la poulie.*

Car le centre de la poulie étant immobile, ſi

la résultante passe par ce point, elle sera détruite, & par conséquent il y aura équilibre. Mais si la résultante ne passe pas par le centre, il est évident que son moment, par rapport à ce point, ne sera pas zéro : donc la différence des moments des puissances *P*, *S* (*Fig.* 65.), ne sera pas zéro par rapport au point fixe *E*; d'où il suit (*Num.* LIII.), qu'il n'y aura pas équilibre dans le plan de la poulie.

CXVI.

Corollaire I. *Deux puissances* P, S, *qui se font équilibre par le moyen d'une poulie fixe, sont nécessairement égales.*

En effet, que l'on prolonge leurs directions jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *O*. Il est évident que leur résultante sera dirigée de *O* en *E*. Donc on aura $P : S :: \sin. EOS : \sin. EOP$. Or $EOS = EOP$, à cause de l'égalité des triangles *EOH*, *EOF*, dans lesquels *OE* est côté commun; $EH = EF$, puisque ces côtés sont rayons du même cercle; & $OH = OF$, parce que ces côtés sont des tangentes tirées au cercle, du même point. Donc les angles correspondants *EOS*, *EOP* sont égaux, ainsi que leurs sinus; & les puissances *P*, *S* proportionnelles à ces sinus sont aussi égales.

CXVII.

Corollaire II. *Chacune des deux puissances*

qui se font équilibre par le moyen d'une poulie fixe, est à la résultante commune qui agit sur le centre de la machine, comme le rayon est à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.

Pour le faire voir, représentons la puissance S (*Fig.* 65.), par la partie *OC* de sa direction, la puissance *P* par *OB* = *OC*, & achevons le parallélogramme *OBDC*. La résultante que j'appelle *R*, sera représentée par la diagonale *OD*, & l'on aura *S* : *R* :: *OC* : *OD*. Or si l'on mène la soustendante *FH*, on aura *OC* : *OD* :: *EH* : *FH*. Car les triangles *EFH*, *ODC* sont semblables, puisque les trois côtés du premier sont perpendiculaires aux trois côtés du second. Donc *S* : *R* :: *EH* : *FH*.

CXVIII.

THÉORÈME II. *Dans une poulie mobile* (Fig 66.), *pour que les deux puissances* P, S, *appliquées à la corde qui embrasse la poulie, soient en équilibre avec une puissance ou poids* R, *dont la direction passe par le centre de la machine, la seule condition requise est que la résultante des deux premières puissances soit égale & diamétralement opposée à la troisième.*

Car il est évident que la destruction des forces ne dépend que de cette condition.

CXIX.

COROLLAIRE II. *Dans la poulie mobile, les*

deux puissances P & S *qui font équilibre au poids* R, *sont égales.*

Car leurs directions prolongées se rencontreront à quelque point *O*, pris sur la direction du poids *R*, puisque leur résultante doit être diamétralement opposée au poids. Donc cette résultante sera dirigée du point *O* au centre *E* de la poulie, & l'on aura la proportion *P* : *S* :: sin. *EOS* : sin. *EOP*. Or on démontrera que sin. *EOS* = sin. *EOP*, comme on l'a démontré pour la poulie fixe (*Num.* CXVI.).

Si l'on supposoit que le cordon *FP*, au lieu d'être soutenu par une puissance, fût attaché à un point fixe, il est visible que sa tension demeureroit toujours égale à celle du cordon *SH*.

CXX.

Corollaire II. *Dans le cas d'équilibre, chacune des puissances* P, S, *est au poids* R, *comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

La démonstration est exactement la même pour la poulie mobile que pour la poulie fixe.

CXXI.

Corollaire III. *Donc si les directions des puissances* P, S, *sont parallèles à la direction du poids ou de la puissance* R, *chacune des puissances* S, P, *ne sera que la moitié du poids* R. Car dans

ce cas, la corde FH deviendra le diamètre de la poulie: donc S ou P sera à R, dans le rapport du rayon au diamètre, ou dans le rapport de 1 à 2.

CXXII.

Corollaire IV. Déterminons encore le rapport de la puissance au poids, dans les poulies moufflées. Une *mouffle* n'est autre chose qu'une chappe qui porte plusieurs poulies; & l'on appelle *poulies moufflées*, *mouffles*, ou, en terme de marine, *palans*, *caliornes*, l'assemblage de deux mouffles, l'une fixe & l'autre mobile, dans lesquelles toutes les poulies sont embrassées par une même corde tirée par la puissance, tandis que le poids est suspendu à la chappe mobile. On peut voir différentes espèces de mouffles représentées par les figures 67, 68, 69.

Si les cordons qui embrassent les poulies, sont parallèles (Fig. 67, 68.), *la puissance est au poids, dans le cas d'équilibre, comme l'unité est au nombre des cordons aboutissants à la mouffle mobile.*

En effet, il est évident (*Num.* CXVI & CXIX), que la tension du cordon SA est égale à celle du cordon BL; que celle-ci est égale à celle du cordon MD, &c. & par conséquent la tension de chaque cordon aboutissant à la mouffle mobile, est équivalente à la puissance S. Or ces tensions doivent soutenir le même poids que soutiendroient six puis-

sances parallèles dont chacune seroit [illegible] qui seroient appliquées aux points [illegible] des cordons; c'est-à-dire, qu'elles doivent former un poids *R* égal à leur résultante. Donc la puissance *S* sera au poids *R*, comme [illegible]. Cette proposition se démontreroit par un raisonnement semblable, quel que fût le nombre des cordons qui soutiennent les poulies mobiles.

En général, *quelle que soit la direction des cordons, la puissance, dans le cas d'équilibre, est au poids comme le sinus total est à la somme des sinus des angles que font avec l'horizon les cordons aboutissans à la moufle mobile.*

Car de quelque manière que soient dirigés les cordons (*Fig.* 65), la tension de chacun d'eux sera toujours égale à la puissance. Cela posé, que l'on décompose chacune de ces tensions en deux autres forces, l'une horizontale & l'autre verticale. Que l'on décompose, par exemple, la tension du cordon *BL*, représentée par [illegible] en deux forces *ab*, *ac*, la première verticale, la seconde horizontale, en achevant le parallélogramme [illegible] & qu'on fasse la même chose pour les tensions de tous les autres cordons. 1° Il est évident que les forces horizontales ne concourront point à soutenir le poids, puisqu'elles sont perpendiculaires à sa direction. Elles doivent donc se détruire mutuellement dans le cas d'équilibre. 2° Dans le triangle rec-

tangle *abd*, on aura la proportion, ſin. tot. : ſin. *adb* :: *ad* = *S* : *ab*. Donc $ab = \frac{S \times \text{ſin. } adb}{\text{ſin. tot.}}$: ce qui nous apprend que *pour avoir la valeur de la force verticale réſultante de la tenſion* S *d'un cordon, il faut multiplier cette tenſion par le ſinus de l'angle que le cordon fait avec l'horizon, & diviſer le produit par le ſinus total.* Donc pour avoir la ſomme des forces verticales de tous les cordons, il faudra multiplier la tenſion *S* par tous les ſinus des angles que font avec le plan horizontal les cordons aboutiſſants à la mouffle mobile, & diviſer le produit par le ſinus total. Donc en appelant *T* la ſomme des ſinus dont il s'agit, & obſervant que la ſomme des forces verticales doit égaler le poids *R*, pour le mettre en équilibre, on aura $R = \frac{ST}{\text{ſin. tot.}}$, d'où l'on tire la proportion qu'il falloit démontrer, *S* : *R* :: ſin. tot. : *T*.

SECTION IV.

Du Tour.

CXXIII.

Le tour, en général, eſt une machine compoſée d'un cylindre & d'une roue qui ont le même axe, dont les extrémités ſont ſupportées par deux appuis.

Cette machine est représentée dans la figure 70. La corde qui porte le poids *P* qu'on veut mouvoir ou soutenir, s'enveloppe autour du cylindre; & la puissance *S* est appliquée à la circonférence de la roue. Il y a des occasions où l'on emploie pour roue, un grand *tambour* creux, dans lequel des hommes en marchant font tourner la machine par leur poids. Souvent aussi, au lieu de se servir d'une roue, on se contente d'implanter perpendiculairement au cylindre, des barres, aux extrémités desquelles la puissance agit. Enfin, quelquefois on fait mouvoir la machine par le moyen d'une ou de deux manivelles. Mais il est évident que les effets de ces différentes especes de roues reviennent, dans le fond, à celui du tour représenté par la figure 70. Si le cylindre est disposé horizontalement, la machine s'appelle *tour* ou *treuil*: si la position du cylindre est verticale, on donne à la machine le nom de *vindas* ou de *cabestan*.

CXXIV.

THÉORÈME. *La seule condition requise pour l'équilibre dans le tour, c'est que les momens de la puissance & du poids, par rapport à l'axe du cylindre, soient égaux.*

Pour le démontrer, imaginons (*Fig.* 71.) trois plans *HI*, *KL*, *MN*, qui passent par le centre *C* de la roue, & dont chacun soit perpendiculaire aux

deux autres, de manière que le plan HI soit parallèle à la direction Py du poids, & que KL se confonde avec le plan de la roue. L'axe tv sera évidemment la commune intersection des deux plans HI & MN. Tirons ensuite dans le plan MN une droite zyx, qui passe par les extrémités des deux rayons Cz, cy, & qui se termine à l'axe du cylindre en x.

1° On peut (*Num.* LI.), décomposer le poids P en deux forces ou poids parallèles p, p', dont les directions passent par les points z, x, de manière que l'action du premier s'exerce dans le plan KL, & celle du second dans le plan HI.

2° Le poids p' dont la direction passe par un point immobile x de l'axe du cylindre, ne peut produire aucun effet. Il ne reste donc que le poids p dont l'action n'est pas détruite, & il ne s'agit plus que de trouver les conditions requises pour qu'il fasse équilibre à la puissance S.

3° Quand deux puissances S, p, sollicitent un plan KL, dans lequel il se trouve un point fixe C, la seule condition requise pour l'équilibre, c'est que la différence de leurs moments, par rapport à ce point fixe, soit zéro. Donc il est nécessaire & il suffit pour l'équilibre, que l'on ait $S \times CO - p \times Cz = 0$. Or il suit de ce qu'on a démontré (*Num.* XXXVIII.), que le moment $p \times Cz$ du poids p par rapport au point C, est égal au moment $P \times cy$ du poids P par rapport

rapport au point *c*. Donc on aura, dans le cas de l'équilibre, $S \times CO - P \times cy = 0$, ce qui donne $S \times CO = P \times cy$.

CXXV.

COROLLAIRE I. *Dans le tour, la puissance est au poids qu'elle soutient en équilibre, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

Car l'équation $S \times CO = P \times cy$ donne évidemment $S : P :: cy : CO$.

On voit par cette proportion, que si le rayon du cylindre est beaucoup moindre que celui de la roue, le poids sera beaucoup plus grand que la puissance qui le soutient. Si, par exemple, le rayon de la roue est dix fois plus grand que celui du cylindre, une puissance équivalente à une livre, sera équilibre à un poids de 10 £.

CXXVI.

REMARQUE. Si l'on taille le cylindre ou *rouleau* d'un tour suivant sa longueur, de manière qu'il ait dans toute sa circonférence plusieurs dents ou parties saillantes égales & également distantes les unes des autres, ce rouleau prend le nom de *pignon*; & l'on appelle *roue à pignon*, celle d'un tour dont le cylindre est ainsi divisé. On donne aussi des dents aux roues du tour qui mènent les pignons, & la machine qu'on appelle *roues dentées* (*Fig.* 72.), n'est autre chose qu'un assemblage de

roues à pignon, dont l'une ne peut se mouvoir sans transmettre le mouvement à toutes les autres, parce qu'elles sont tellement disposées, que le pignon d'une roue engrène avec les dents d'une autre roue. Dans cette machine le poids P est suspendu à une corde qui s'enveloppe autour du rouleau de la dernière roue, & la puissance S agit à la circonférence de la première roue. Il est évident que chaque roue, avec son pignon, doit être considérée comme une espèce de tour. Car les dents de la roue B, par exemple, ne peuvent engrener avec celles du pignon a, sans les presser & sans produire, par leur pression, le même effet que produiroit un poids suspendu à la circonférence de ce pignon; & l'on doit dire la même chose de l'effort que supportent les dents des autres pignons.

CXXVII.

COROLLAIRE II. *Dans les roues dentées, la puissance* S *est au poids* P *qu'elle tient en équilibre, comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

En effet, soit les trois roues A, B, C, dont les rayons soient respectivement R'', R', R; & que les rayons de leurs pignons a, b, c, soient r'', r', r. Appelons P'' & P' les pressions que supportent les dents des pignons a, b; & P le poids qui agit à la circonférence du cylindre ou pignon c. Pour qu'il

y ait équilibre, il faut que les dents de chaque pignon soient autant pressées que les dents de la roue avec lesquelles il engrène. P'' est donc la force qui agit à la circonférence de la roue B, & P' la force qui agit à la circonférence de la roue C.

Considérant à présent chaque roue & son pignon comme la roue & le cylindre du tour représenté (*Fig.* 70.), & observant que dans le tour la puissance est au poids, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue, nous aurons les proportions suivantes :

$$S : P'' :: r'' : R''.$$
$$P'' : P' :: r' : R'.$$
$$P' : P :: r : R.$$

Multipliant ces proportions par ordre, & divisant ensuite les deux termes de la première raison par $P'' \times P'$, nous aurons

$$S : P :: r'' \times r' \times r : R'' \times R' \times R.$$

Donc la puissance S est au poids P, comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.

Supposons, par exemple, que les rayons des roues soient égaux entr'eux, ainsi que ceux des pignons, & que les rayons des roues soient dix fois plus grands que ceux des pignons : la proportion que nous venons de trouver, deviendra $S : P$ $:: 1 \times 1 \times 1 : 10 \times 10 \times 10$, ou $S : P :: 1 : 1000$;

I 2

ce qui nous apprend que la puissance *S*, équivalente à une livre, feroit équilibre à un poids de 1000 livres.

Au lieu de pignons, on se sert quelquefois de lanternes. Ce sont des cylindres creux, qui ont pour bases deux plateaux parallèles entr'eux, qui tiennent l'un à l'autre par le moyen de bâtons ou fuseaux qui les traversent, ou qui étant à égales distances les uns des autres, forment le contour du cylindre. Alors les dents de la roue engrènent avec les fuseaux de la lanterne, comme elles feroient avec les ailes d'un pignon; & le méchanisme revient absolument au même dans les deux cas.

CXXVIII.

COROLLAIRE III. Le *cric simple* (*Fig.* 73.), est une machine composée d'une barre *AB*, garnie à l'une de ses faces de dents de fer, & mobile suivant le sens de sa longueur dans une caisse *DE*. Les dents de la barre engrènent avec celles d'un pignon *C*, qu'on fait tourner autour de son axe par le moyen d'une manivelle *MN*. Il est évident que le cric doit être considéré comme un tour dans lequel la puissance agit à la circonférence décrite par l'extrémité de la manivelle, tandis que la résistance agit à la circonférence du pignon, dont les dents sont pressées par celles de la barre. Donc *la puissance sera au poids, comme le rayon du pignon est au rayon*

de la manivelle. On voit par là, qu'en faisant le rayon du pignon très-petit par rapport à celui de la manivelle, on peut, avec une force médiocre, élever un poids très-considérable.

Quelquefois pour soulever un plus grand poids avec la même force appliquée à la manivelle, on substitue au pignon *C* plusieurs roues dentées, telles que celles dont nous avons expliqué l'effet plus haut.

CXXIX.

COROLLAIRE IV. On peut, au moyen du tour, rendre uniforme l'action d'une force qui diminue continuellement. Il suffit pour cet effet, d'appliquer successivement la puissance à différentes circonférences qui croissent comme la puissance diminue. Alors cette puissance aura toujours le même moment par rapport à l'axe du cylindre; & par conséquent elle sera toujours capable de faire équilibre au même poids. Donc son action sera constamment la même.

C'est ainsi qu'on est parvenu à rendre uniforme le mouvement dans les horloges à ressort & dans les montres ordinaires; quoique l'action du ressort qui est le principe moteur dans ces machines, diminue continuellement, à mesure qu'il se déploie. Une chaîne attachée par un bout au barillet qui renferme le ressort, & par l'autre bout à une fusée dont la figure est à peu près celle d'un cône tron-

qué, à bases parallèles, tire cette même fusée, qui, obligée de tourner sur elle-même, communique le mouvement à tout le rouage dont la montre est composée. A mesure que le ressort se déploie, & que par conséquent sa force élastique diminue, la chaîne est appliquée à de plus grandes circonférences; ce qui fait que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe de cette fusée, est toujours le même, du moins sensiblement. *Voyez la figure* 74.

SECTION V.

Du Plan incliné.

CXXX.

On appelle en général *plan incliné*, celui qui fait un angle avec l'horizon. Cet angle peut être ou infiniment petit, ou droit, ou avoir une valeur finie comprise entre zéro & 90 degrés. Dans le premier cas, le plan est *horizontal*; dans le second, il est *vertical*; dans le troisième, il est proprement le *plan incliné*, que l'on compte parmi les machines méchaniques, & dont nous allons traiter à présent.

CXXXI.

Théorème. *Pour qu'un corps placé sur un plan incliné, & soumis à l'action de tant de forces qu'on voudra, soit en équilibre, il est nécessaire &*

il ſuffit, 1° que la réſultante de toutes les puiſſances ſoit perpendiculaire au plan; 2° que cette réſultante paſſe par quelque point où le plan touche le corps, ou du moins, qu'elle puiſſe être décompoſée en d'autres forces qui paſſent par des points où le corps eſt appuyé ſur le plan.

La première de ces conditions eſt néceſſaire, parce que ſi la réſultante étoit oblique au plan, on pourroit la décompoſer en deux forces, l'une perpendiculaire au plan, qui ſeroit détruite; & l'autre parallèle à ce plan, qui n'éprouveroit aucune réſiſtance de ſa part, & qui par conſéquent ne pourroit manquer de communiquer du mouvement au corps.

La ſeconde condition n'eſt pas moins eſſentielle pour l'équilibre. En effet, le plan n'eſt preſſé & ne réſiſte que dans les points où il touche le mobile; donc afin que la réſultante des puiſſances qui agiſſent ſur le corps ſoit détruite, il faut qu'elle paſſe par quelque point d'appui; ou qu'on puiſſe la décompoſer en d'autres puiſſances dirigées perpendiculairement au plan incliné, dans différents points de contact, où elles ſoient anéanties.

Il eſt viſible auſſi que ces deux conditions ayant lieu, la réſultante de toutes les puiſſances qui ſollicitent le corps, ſera détruite, & que le corps ne pourra prendre aucun mouvement. Donc ces conditions ſuffiſent pour l'équilibre.

CXXXII.

COROLLAIRE I. *Donc si un corps pesant* P (Fig. 75.), *est soutenu en équilibre par une puissance* S, *& que du point* O *où la direction de la puissance rencontre la verticale* OI, *menée par le centre de gravité* G *du poids, on abaisse sur le plan la perpendiculaire* OE, *elle sera la direction de la résultante du poids* P *& de la puissance* S.

Car on doit regarder le poids du corps comme une force *P* appliquée au centre de gravité *G*; & dont la direction verticale concourt en un point O avec celle de la puissance *S*. Or la résultante de ces deux forces doit passer par le point où concourent leurs directions; & dans le cas d'équilibre, elle doit être perpendiculaire au plan incliné (*Num.* CXXXI.). Donc elle doit être dirigée suivant la perpendiculaire *OE*.

CXXXIII.

REMARQUE. Il est évident 1° que les trois directions *OI*, *OS*, *OE*, des deux puissances composantes & de leur résultante, sont dans le même plan *EOI* (*Num.* XIV.); 2° que ce plan est perpendiculaire au plan horizontal *MZ* & au plan incliné *MN*, puisqu'il passe par les lignes *OI*, *OE*, respectivement perpendiculaires à ces plans : d'où il suit que les lignes *AB*, *AC*, où le plan vertical, dans lequel agissent les puissances,

rencontre *MN* & *MZ*, ſont perpendiculaires en *A* ſur la commune interſection de ces deux derniers plans, & que par conſéquent l'angle *BAC* meſure l'inclinaiſon de *MN* ſur *MZ*.

Donc ſi du point *B* on abaiſſe la verticale *BC*, on pourra conſidérer toutes les forces comme agiſſantes dans le plan du triangle rectangle *BAC*, & faire préciſion des autres parties du plan incliné. La *longueur* du plan incliné eſt exprimée par l'hypothénuſe *AB*, la *hauteur* par le côté vertical *BC*, & la *baſe* par le côté horizontal *AC*.

CXXXIV.

COROLLAIRE II. *Si une puiſſance* S (Fig. 76.), *tient en équilibre un corps peſant* P *ſur le plan incliné* AB, *la puiſſance, le poids du corps & la preſſion du plan ſeront entr'elles reſpectivement, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan, le coſinus de l'angle que fait la direction de la puiſſance avec la longueur du plan, & le coſinus de l'angle que fait la direction de la puiſſance avec la baſe du même plan.*

Car le poids *P* du corps étant regardé comme une ſeule puiſſance dirigée ſuivant la ligne verticale *OF*, qui paſſe par le centre de gravité *G* de ce corps, & qui rencontre en *O* la direction de la puiſſance *S*, la réſultante du poids & de la puiſſance, dans le cas d'équilibre, ſera dirigée ſuivant la perpendi-

culaire OE (*Num.* CXXXII.), & repréſentera la preſſion du plan que j'appelle R.

Cela poſé, nous aurons (*Num.* XIX.), S : ſin. FOE :: P : ſin. EOH :: R : ſin. FOH. Or 1° l'angle FOE eſt égal à l'angle BAC, qui meſure l'inclinaiſon du plan. Car dans les deux triangles AIF, OIE, on remarque deux angles droits en F & en E, & deux angles oppoſés au ſommet en I : donc le troiſième angle BAC du premier triangle eſt égal au troiſième angle FOE du ſecond. 2° Dans le triangle rectangle OEH, l'angle EOH eſt le complément de l'angle OHE que fait la direction de la puiſſance avec la longueur du plan incliné ; donc ſin. EOH = coſ. OHE. 3° Dans le triangle rectangle OFD, l'angle FOD eſt le complément de l'angle FDO, & par conſéquent ſin. FOH = coſ. FDO.

Mettons donc à la place des trois ſinus énoncés dans notre proportion, les quantités que nous venons de démontrer leur être égales, & nous aurons S : ſin. BAC :: P : coſ. OHE :: R : coſ. FDO.

CXXXV.

COROLLAIRE III. *Si la direction de la puiſſance S* (Fig. 77.) *qui fait équilibre au poids* P, *eſt parallèle à la longueur du plan incliné, la puiſſance ſera au poids, comme la hauteur du plan eſt à ſa longueur.*

En effet, quand la direction de la puissance & la
igueur du plan incliné sont paralleles, l'angle
HE qu'elles forment, devient zéro. Or le co-
nus d'un angle = o est le sinus total : donc la
oportion que nous venons de trouver (*Num.*
XXXIV.), deviendra *S* : sin. *BAC* :: *P* : sin.
ot.; ou *S* : *P* :: sin *BAC* : sin. tot. : mais sin. *BAC*
sin. tot. :: *BC* : *AC*, parce que dans le triangle
BAC les sinus des angles sont proportionnels aux
ôtés opposés : donc *S* : *P* :: *BC* : *BA*.

CXXXVI.

COROLLAIRE IV. *Une puissance donnée S
endra en équilibre sur le plan, le plus grand poids
ossible, quand sa direction sera parallele à la
ngueur du plan.*

En effet, nous avons vu (*Num.* CXXXIV.),
l'on avoit en général (*Fig.* 76.), *S* : sin. *BAC*
: *P* : cos. *OHE*; ou *S* : *P* :: sin. *BAC* : cos. *OHE*.
r le cosinus de l'angle *OHE* est le plus grand pos-
ble par rapport au sinus de l'angle *BAC*, quand
angle *OHE* = o ; c'est-à-dire, quand la direc-
on de la puissance & la longueur du plan sont
aralleles. Car alors le cosinus de l'angle *OHE*
st égal au sinus total, & dans toute autre hypo-
hèse il est moindre que le sinus total. Donc aussi
poids *P* est le plus grand possible par rapport
la puissance *S*, quand la direction de cette puis-
nce est parallele à la longueur du plan.

CXXXVII.

CoROLLAIRE V. *Si la direction de la puissance est parallèle à la base du plan incliné, la puissance sera au poids, comme la hauteur du plan est à sa base.*

Car dans la figure 78, on aura $S : P :: \text{sin.} BAC : \text{cos.} OHE$: or $\text{cos.} OHE = \text{cos.} BAC$; puisque dans le cas présent les angles OHE, BAC, sont alternes internes entre parallèles; & l'on voit que $\text{cos.} BAC = \text{sin.} ABC$, parce que l'angle ABC est le complément de l'angle BAC. Donc on a $S : P :: \text{sin.} BAC : \text{sin.} ABC :: BC : AC$.

SECTION VI.

De la Vis.

CXXXVIII.

LA *vis* (*Fig.* 79.), est une machine composée de deux cylindres de même diamètre, l'un solide & revêtu d'un relief spiral, par-tout également incliné aux lignes droites qu'on peut mener de ses différents points parallèlement à l'axe; l'autre creux que traverse le premier, & dans lequel on a sillonné un trait spiral correspondant & égal au relief qu'il doit recevoir. On donne aussi le nom de *vis* à chacune de ces parties prises séparément. Le cylindre solide qui entre dans l'autre, est la vis *intérieure*,

u ſimplement la *vis*. La pièce où ſe trouve la ca-
ité cylindrique, eſt la vis *extérieure* ou *l'écrou*.
)rdinairement auſſi on entend par le cylindre de
a vis, celui qui eſt ſolide & qui peut tourner dans
l'autre.

Le relief ſpiral qui revêt extérieurement le cylindre, s'appelle *filet de la vis*: on donne le nom de *ſpire* à la partie de ce filet qui correſpond à un tour ſur le cylindre. Enfin on appelle *hauteur du pas de vis*, ou ſimplement *pas de vis*, la diſtance *ac* qu'il y a parallèlement à l'axe du cylindre entre deux ſpires correſpondantes. Puiſque le filet ſpiral ı par-tout la même inclinaiſon ſur le cylindre, il ·ſt évident que tous les pas de vis doivent être ·gaux.

CXXXIX.

LES ſpires qui enveloppent le cylindre, peuvent ·tre conſidérées comme une eſpèce de plan incliné. ·n effet, ſi l'on replioit autour du cylindre (*Fig.* 80.) es triangles rectangles *CKI*, *ILM*, *MNO*, *OPR*, *&c.*, dont je ſuppoſe les baſes égales à la ·irconférence de ce cylindre, & les hauteurs égales ıux pas de vis, les hypothénuſes *CK*, *IL*, *MN*, *OP*, *&c.*, en s'enveloppant, formeroient des ſpires parfaitement ſemblables à celles de la vis. Donc les ſpires de la vis ſont des plans inclinés parfaitement égaux entr'eux, & qui ont pour longueur la longueur même d'une ſpire, pour hauteur la

hauteur du pas vis, & pour base la circonférence du cylindre.

CXL.

On emploie la vis & son écrou pour comprimer les corps, quelquefois aussi pour élever des poids. L'effet revient au même dans les deux cas. La puissance *F* (*Fig.* 79.) qui meut la machine, est appliquée ordinairement à une barre qui traverse le cylindre ou l'écrou; & l'une de ces pièces est mobile, tandis que l'autre est immobile. Mais soit que l'on fasse mouvoir l'écrou sur la vis ou la vis dans l'écrou, ce sont toujours deux plans inclinés, dont l'un glisse sur l'autre, & l'effort de la puissance doit être le même pour soutenir un poids donné. Il ne s'agit donc que de trouver pour l'un de ces deux cas, le rapport de la puissance au poids qui lui fait équilibre. Nous supposerons que le poids, ou en général la résistance, agisse dans le sens de l'axe du cylindre, & que la puissance soit dirigée dans un plan perpendiculaire à cet axe.

CXLI.

Théorème. *Dans la vis, la puissance est au poids qui lui fait équilibre, comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence d'un cercle qui a pour rayon la distance de l'axe au point où la puissance est appliquée.*

Supposons, pour le démontrer, que la vis inté-

ieure ſoit fixe (*Fig.* 79.), & que le poids ſoit ſuſpendu à l'écrou mobile. Il eſt évident que le filet ſpiral du cylindre ſera preſſé par l'écrou que le poids tend à faire deſcendre; & chaque point de l'écrou appuyé ſur le point correſpondant de la ſpire convexe, ſera comme un poids poſé ſur un plan incliné; d'où l'on voit que l'écrou prendra néceſſairement du mouvement, ſi rien ne s'y oppoſe, de la même manière qu'un corps placé ſur un plan incliné deſcend néceſſairement, à moins qu'il ne ſoit retenu par quelque puiſſance. Concevons donc que le poids ſuſpendu à l'écrou eſt décompoſé en une infinité de ponduſcules p, p, p, *&c.*, qui preſſeroient le relief ſpiral, & cherchons quelle ſeroit la force néceſſaire pour ſoutenir ces poids élémentaires, en les empêchant de gliſſer ſur la ſpire.

1° Si l'on appliquoit à chacun de ces poids p, une puiſſance s dirigée parallèlement à la baſe du plan incliné que forme la ſpire, chaque puiſſance s ſeroit au poids p correſpondant, comme le pas de vis, qui eſt la hauteur du plan incliné, eſt à la circonférence du cylindre qui eſt la baſe de ce plan, (*Num.* CXXXVII.). Donc la ſomme de toutes les puiſſances particulières s, s, s, *&c.*, ou, ce qui revient au même, la puiſſance totale eſt au poids total qui vaut la ſomme de tous les poids élémentaires, comme la hauteur du pas de vis eſt à la circonférence du cylindre; ou, en appelant la puiſſance

totale S, le poids total P, la hauteur du pas de vis h, & la circonférence du cylindre c, on aura la proportion

$$S : P :: h : c.$$

La propofition eft donc démontrée pour le cas où la puiffance eft appliquée au filet fpiral, & fe trouve éloignée de l'axe d'une quantité égale au rayon du cylindre.

2° Suppofons à préfent que la puiffance agiffe à l'extrémité d'une barre en F. On voit aifément qu'il faudroit la même puiffance pour faire équilibre au poids P, que pour faire équilibre à la force S, capable de le foutenir. Or la puiffance F appliquée à l'extrémité de la barre, & la puiffance S appliquée au filet fpiral, font dans le même cas que deux puiffances qui agiroient par le moyen d'un tour: donc (*Num.* CXXV.) la puiffance F eft à la puiffance S, comme le rayon du cylindre eft à la longueur de la barre ou du levier, que l'on peut confidérer comme le rayon de la circonférence que la puiffance F tend à faire décrire; & puifque les rayons des cercles font entr'eux comme leurs circonférences, on pourra dire que la puiffance F eft à la puiffance S, comme la circonférence c du cylindre eft à la circonférence que j'appelle C, & qui auroit pour rayon la longueur de la barre. Donc on aura la proportion

$$F : S :: c : C.$$

Si

Si on la multiplie par la proportion $S : P :: h : c$ que nous avons trouvée plus haut, & qu'ensuite on divise par S les deux termes de la première raison, & par c les deux termes de la seconde, on trouvera enfin $F : P :: h : C$; c'est-à-dire, la puissance qui agit à l'extrémité de la barre est au poids que soutient l'écrou, comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence qui a pour rayon la distance de la puissance à l'axe du cylindre.

Il est facile à présent de voir les raisons qui ont porté plusieurs auteurs à ne point compter la vis parmi les machines simples, mais à la rapporter au plan incliné, ou à la regarder comme composée du plan incliné & du tour.

On peut remarquer encore que dans la démonstration que nous venons de donner, nous faisons précision du frottement, qui peut être très-considérable dans la vis.

CXLII.

REMARQUE I. On a donné le nom de *vis sans fin* (*Fig.* 81.), à une machine composée d'une vis simple dont le filet engrène avec les dents d'une roue, qui porte à son centre un rouleau cylindrique. Le poids est suspendu à une corde qui s'enveloppe autour de ce rouleau, & la puissance F communique ou tend à communiquer le mouvement à la vis au moyen de la manivelle à laquelle elle est appliquée.

Cette machine étant composée de la vis & du tour, on peut conclure d'après ce qui a été démontré (*Num.* CXXV & CXLI), que dans le cas d'équilibre *la puissance est au poids, comme le rayon du cylindre multiplié par la hauteur du pas de vis, est au rayon de la roue multiplié par la circonférence que décriroit la puissance, si le mouvement avoit lieu.*

En effet, soit *F* la puissance qui tend à faire tourner la vis, *P* le poids suspendu à la circonférence du rouleau cylindrique, *d* la dent de la roue qui engrène avec le filet de la vis, *S* l'effort que cette dent exerce contre la spire *a*. Enfin soient *h* la hauteur du pas de vis, *R* le rayon de la roue, *r* le rayon de son cylindre, & *C* la circonférence que la puissance décriroit, si le mouvement avoit lieu.

Puisque dans la vis la puissance est à la pression qui s'exerce parallèlement à l'axe contre le filet spiral, comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire, nous aurons la proportion

$$F : S :: h : C.$$

Et puisque la spire *a*, dans le cas d'équilibre, presse autant la dent *d* qu'elle en est pressée, la roue sera sollicitée à sa circonférence par une force égale à *S*. Or dans le tour que forme la roue avec son cylindre, la puissance *S* est au poids *P*, comme le

rayon du cylindre eſt au rayon de la roue. Donc nous aurons la ſeconde proportion

$$S : P :: r : R$$

Si on la multiplie par la première, & qu'enſuite on diviſe par S les deux termes de la première raiſon du produit, on trouvera la proportion qu'il falloit démontrer

$$F : P :: hr :: CR.$$

CXLIII.

REMARQUE II. La vis d'*Archimède*, ainſi nommée, parce qu'Archimède en eſt l'inventeur, eſt un tube ou un canal creux, qui tourne autour d'un cylindre *AH* (*Fig.* 82.), de même que le filet ſpiral dans la vis ordinaire. Le cylindre eſt incliné à l'horizon ſous un angle d'environ 45 degrés, & ſe meut ſur deux pivots. Ayant placé une balle de plomb, ou quelqu'autre corps grave à l'embouchure *B* du canal, ſi l'on fait tourner la vis, le point *B* s'élèvera au deſſus du point *C*, qui deſcendra lui-même d'une certaine quantité, & la balle obéiſſant à ſa peſanteur paſſera de *B* en *C*. Par la même raiſon, ſi l'on continue à faire tourner le cylindre, elle paſſera ſucceſſivement de *C* en *D*, de *D* en *E*, &c., & on lui fera parcourir ainſi de bas en haut toute la longueur de la vis. Si la partie inférieure du cylindre eſt plongée dans l'eau, on conçoit facilement que le canal doit s'emplir à meſure qu'il tourne,

& produire un écoulement par l'orifice supérieur. Cette machine ingénieuse peut donc s'employer utilement pour vuider des lacs & des étangs.

Si dans la vis ordinaire on faisoit tourner l'écrou dans un seul & même plan autour de son axe, le cordon de la vis intérieure, abstraction faite de tout frottement, seroit éxactement dans le même cas que le fluide, qui, dans la vis d'Archimède, remplit le canal spiral. On peut donc rapporter la vis d'Archimède à la vis ordinaire, en considérant le canal creux dans la première comme l'écrou dans la seconde, & le relief spiral de celle-ci comme le fluide contenu dans le canal de la première.

SECTION VII.

Du Coin.

CXLIV.

Le *coin* est un prisme triangulaire *ABCDEF* (*Fig.* 83.), que l'on introduit dans une fente pour écarter ou séparer les deux parties d'un corps. Quelquefois aussi on l'emploie pour comprimer des corps ou pour soulever des poids. Le parallélogramme *ABCD* qui reçoit immédiatement l'action de la puissance, est la *base* ou la *tête* du coin. Ses côtés sont les deux faces parallélogrammiques *ABFE*, *DCFE*, qui agissent sur les parties du corps qu'on

veut séparer. Enfin on appelle *pointe* ou *tranchant* du coin, l'angle solide que ces deux faces forment en *EF*.

CXLV.

Pour qu'une puissance imprimée perpendiculairement à la tête du coin fasse, équilibre aux résistances des deux parties du corps qu'on veut écarter, il faut évidemment que cette puissance & ces résistances soient dirigées dans un même plan. De plus, les parties entre lesquelles on introduit le coin, résistent en pressant perpendiculairement ses côtés dans les points de contact; & par conséquent il faut que le plan dans lequel sont dirigées les trois forces dont il s'agit, soit perpendiculaire non seulement à la base du coin, mais encore à ses côtés. Donc ce plan sera un triangle égal & parallèle au profil *ADE* du coin; & puisque les efforts de la puissance & des résistances se réunissent dans ce plan, on peut supposer tout le coin réduit à un seul triangle tel que *AED*.

CXLVI.

THÉORÈME *Dans le cas d'équilibre, la puissance imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les parties qu'on veut séparer opposent perpendiculairement à ses côtés, comme la tête du coin est à la somme de ses côtés.*

Pour le démontrer, ſuppoſons le coin AED (*Fig.* 84.) introduit entre deux parties M, N d'un corps. Soient S la puiſſance imprimée perpendiculairement à la baſe AD; R & R' les réſiſtances qu'oppoſent en M & en N les parties que l'on veut ſéparer. Les directions de ces réſiſtances ſeront des lignes MG, NH perpendiculaires aux côtés du coin, & elles ſe rencontreront en quelque point C. Si l'on repréſente R & R' par les parties CG, CH de leurs directions, & qu'on achève le parallélogramme $CGIH$, il faudra pour l'équilibre que la puiſſance S ſoit égale & diamétralement oppoſée à la réſultante CI des deux réſiſtances. Les trois forces S, R, R' ſeront donc proportionnelles aux trois lignes CI, CG, CH; ou puiſque $CH = GI$, aux trois lignes CI, CG, GI. Or ces trois dernières lignes ſont elles-mêmes proportionnelles aux lignes AD, DE, AE: car les deux triangles ADE, CGI ſont ſemblables, puiſque les trois côtés du premier ſont perpendiculaires ſur les trois côtés du ſecond. Donc on aura la ſuite de raiſons égales

$$S : AD :: R : DE :: R' : AE;$$

d'où l'on tire la proportion qu'il falloit démontrer, $S : R + R' :: AD : DE + AE$.

CXLVII.

Corollaire. On voit par là que plus la tête du coin eſt petite par rapport à ſes côtés, moins

il faut que la puissance fasse d'effort pour soutenir ou pour surmonter les résistances des parties qu'on veut séparer.

CXLVIII.

REMARQUE I. On peut en général rapporter au coin tous les instruments tranchants ou pénétrants, la coignée ou la serpe du Bûcheron, le ciseau & la gouge du Sculpteur & du Menuisier, la lancette & le scalpel du Chirurgien, le couteau & le rasoir qui sont entre les mains de tout le monde, les clous, les épingles, &c.

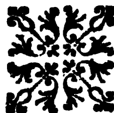
CXLIX.

REMARQUE II. Nous finirons cet article sur l'équilibre des machines, par les deux observations suivantes:

1° *Toutes les fois qu'une machine est en équilibre, la puissance est au poids, comme l'espace dont il s'élèveroit, si le mouvement avoit lieu, est à l'espace que décriroit la puissance dans le même temps.* Dans un levier droit, par exemple, un poids de 10 £ sera contrebalancé par une puissance d'une livre, pourvu qu'il soit dix fois plus près qu'elle de l'appui. Mais il est visible que si le levier prenoit du mouvement, l'arc décrit par la puissance seroit à l'arc décrit par le poids, comme 10 est à 1. Pareillement dans les mouffles représentées (*Fig 67 & 68.*), la puissance *S* est six fois moindre que le

poids *P* qu'elle ſoutient en équilibre: mais ſi le mouvement avoit lieu, l'eſpace qu'elle parcourroit, ſeroit ſix fois plus grand que celui dont elle feroit monter le poids; & l'on peut vérifier aiſément la même choſe dans toutes les autres machines.

2° Si les différentes parties des machines gliſſoient ſans difficulté les unes ſur les autres, & que les cordages dont on ſe ſert fuſſent parfaitement fléxibles, on feroit naître le mouvement, pour peu qu'on augmentât la puiſſance ou le poids qui ſe font équilibre. Mais il n'exiſte dans la nature ni corps dont les ſurfaces ſoient parfaitement polies, ni cordes qui n'aient plus ou moins de roideur. De-là, dans l'uſage des machines, deux eſpèces de réſiſtances, qui ont pour cauſe, l'une le *frottement* des ſurfaces, l'autre le *défaut de fléxibilité* dans les cordages. Ces réſiſtances s'oppoſent à la génération du mouvement, & demandent, pour être ſurmontées, une certaine force que l'on ne peut déterminer que par approximation.



CHAPITRE III.

ÉLÉMENS DE DYNAMIQUE.

LA Dynamique a pour objet le mouvement des corps. Nous traiterons des loix du mouvement & des differents obſtacles que les corps en mouvement peuvent éprouver.

ARTICLE PREMIER.

Des Loix du Mouvement.

CL.

ON appelle *loix du mouvement* certaines règles ſuivant leſquelles tous les corps ſe meuvent généralement & conſtamment, lorſqu'ils obéiſſent à quelque cauſe motrice. Ces loix ſont ou *générales* ou *particulières*. On entend par loix générales, celles qui ſont comme les axiomes d'où les autres ſont déduites. Il paroît qu'on peut les rapporter aux trois principes fondamentaux que nous avons démontrés au commencement de cet ouvrage. Les loix particulières ne ſont que des applications de ces principes aux différentes eſpèces de mouvement. Nous traiterons en particulier du mouvement uniforme,

du mouvement accéléré ou retardé, du mouvement des corps follicités par des forces centrales, du mouvement des centres de gravité, du choc & de la réflexion des corps.

SECTION I.

Du Mouvement uniforme.

CLI.

Le mouvement *uniforme* eſt celui d'un corps dont la vîteſſe eſt toujours la même, ou, ce qui revient au même, c'eſt celui d'un corps qui parcourt des eſpaces égaux en temps égaux. On a démontré (*Num.* IV.), que le mouvement de deux corps étant uniforme, leurs vîteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus diviſés par les temps employés à les parcourir. On a vu auſſi (*Num.* XXII.) que les forces de deux corps étoient entr'elles comme leurs quantités de mouvement. Toutes les loix du mouvement uniforme ne ſont que des conſéquences de ces deux propoſitions.

CLII.

Théorème I. *Si les vîteſſes de deux corps mus uniformément ſont égales, les eſpaces parcourus ſeront comme les tems employés à les parcourir.*

Car en appelant reſpectivement V & v les vîteſſes des deux mobiles, S & s les eſpaces qu'ils ſont ſup-

posés parcourir, T & t les tems employés à parcourir ces espaces, on aura (*Num.* IV.), $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Donc puisque $V=v$, on aura $\frac{S}{T} = \frac{s}{t}$, d'où l'on tire $S : s :: T : t$.

CLIII.

THÉORÈME II. *Si les espaces parcourus par deux corps mus uniformément, sont égaux, les vîtesses seront en raison inverse des tems.*

Car si les espaces sont égaux, les numérateurs seront les mêmes dans les deux fractions $\frac{S}{T}$, $\frac{s}{t}$; & par conséquent ces fractions seront en raison inverse des dénominateurs. Or les vîtesses V & v des deux mobiles sont entr'elles comme ces fractions: elles seront donc en raison inverse des dénominateurs T, t. Donc on aura $V : v :: t : T$.

CLIV.

THÉORÈME III. *Les forces de deux corps mus uniformément, sont en raison composée de leurs masses & de leurs vîtesses.*

Car en nommant respectivement F & f les forces de ces deux corps, M & m leurs masses, V & v leurs vîtesses, on aura (*Num.* XXII.), $F : f :: MV : mv$. Or la raison $MV : mv$ est évidemment composée des deux raisons simples $M : m$,

$V : v$. Donc les forces sont en raison composée des masses & des vitesses.

C L V.

COROLLAIRE. *Si les masses de deux corps mus uniformément sont égales, les forces seront comme les vîtesses.* Car alors dans la proportion $F : f :: MV : mv$, on pourra diviser les deux termes de la dernière raison par la quantité M que l'on suppose égale à la quantité m, & l'on aura $F : f :: V : v$.

Pareillement *si les vîtesses* V & v *des deux corps étoient égales, les forces seroient comme les masses.* Car dans la même proportion $F : f :: MV : mv$, on pourroit diviser les deux termes de la seconde raison par $V = v$, & l'on auroit $F : f :: M : m$.

C L V I.

THÉORÈME IV. *Si les masses des corps mus uniformément sont en raison réciproque des espaces parcourus, les forces seront en raison réciproque des tems employés à les parcourir.*

En effet, dans la proportion $F : f :: MV : mv$, on peut substituer $\frac{S}{T}$ au lieu de V, & $\frac{s}{t}$ au lieu de v, parce que la vîtesse égale l'espace divisé par le tems; & l'on aura $F : f :: \frac{MS}{T} : \frac{ms}{t}$. Or par l'hypothèse, $M : m :: s : S$, d'où l'on tire $MS = ms$.

Donc les fractions $\frac{MS}{T}$, $\frac{ms}{t}$, qui ont pour numérateurs des quantités égales, sont en raison inverse de leurs dénominateurs; & par conséquent les forces qui sont entr'elles comme ces fractions, sont aussi en raison inverse des mêmes dénominateurs; ce qui donne $F : f :: t : T$.

SECTION II.

Du Mouvement accéléré ou retardé.

CLVII.

Un corps qui n'a reçu qu'une impulsion, persévère dans son mouvement avec la même vîtesse & dans la même direction qu'il a eue au premier instant (*Num.* XIII.). Mais s'il vient à recevoir une nouvelle impulsion dans le même sens ou en sens contraire à la première, il se meut alors avec une vîtesse égale à la somme ou à la différence des deux vîtesses qu'il a reçues successivement (*Num.* XVI. & XVII.). Donc si l'on conçoit qu'à des intervalles de tems déterminés, le corps reçoive de nouvelles impulsions dans le même sens, ou en sens contraire de la première, il sera mu d'un mouvement *varié* ou *inégal;* sa vîtesse sera différente au commencement de chaque intervalle de tems. Cette vîtesse pourtant, au bout d'un tems quelconque, pourra toujours s'estimer, en déterminant l'espace qu'il décri-

roit ſi elle devenoit uniforme, & en diviſant cet eſpace par le tems pendant lequel il ſeroit décrit.

CLVIII.

On appelle en genéral *force accélératrice*, toute force qui par ſon action tend à faire varier le mouvement d'un corps. Lorſqu'à des intervalles de tems égaux elle agit également, on l'appelle *force accélératrice conſtante*, ou *force retardatrice conſtante*, ſuivant qu'elle tend à augmenter ou à diminuer la vîteſſe du mobile; & le mouvement qui réſulte de l'action d'une telle force, eſt appelé *mouvement uniformément accéléré*, ou *mouvement uniformément retardé.*

Après avoir démontré les loix de ce mouvement conſidéré en général, nous en ferons l'application au mouvement des corps peſants qui tombent ſuivant des lignes verticales, ou le long des plans inclinés, ou le long des ſurfaces courbes, & nous finirons par conſidérer le mouvement des projectiles & des pendules.

Du Mouvement uniformément accéléré ou retardé en général.

CLIX.

Théorème I. *L'eſpace parcouru par un mobile en vertu d'impulſions égales, reçues au commencement de pluſieurs intervalles de tems égaux,*

ıut le demi-produit de la première & de la der-
ère vîteſſe multipliées par le tems total.

En effet, ſoit le mobile *A* (*Fig.* 85.) qui reçoive ıe impulſion capable de lui faire parcourir pen-ınt le premier intervalle de tems, un eſpace *AB* /ec la vîteſſe *g*. Si le mobile arrivé au point *B*, :çoit une nouvelle impulſion égale à la première : dans le même ſens, il parcourra, pendant le ſe-ond intervalle de tems, l'eſpace *B C* avec une vî-eſſe $2g$: & ſi l'on ſuppoſe qu'il reçoive au com-nencement de tous les intervalles ſuivants une im-»ulſion toujours égale à la première, il eſt viſible ꝗu'il décrira pendant ces intervalles de tems égaux, les eſpaces *C D*, *D E*, *E F*, &c., avec les viteſſes $3g$, $4g$, $5g$, &c.

Cela poſé, ſoit t le tems total, s l'eſpace décrit par le mobile pendant ce tems, n le nombre des intervalles au commencement deſquels le corps reçoit de nouvelles impulſions. Chacun de ces in-tervalles, pendant leſquels le mouvement eſt uni-forme, vaudra $\frac{t}{n}$; & par conſéquent en multipliant par $\frac{t}{n}$ les vîteſſes g, $2g$, $3g$, $4g$, &c., on aura $\frac{gt}{n}$, $\frac{2gt}{n}$, $\frac{3gt}{n}$, $\frac{4gt}{n}$, &c., pour les valeurs des différents eſpaces parcourus pendant les intervalles particuliers dont le tems total eſt compoſé. Appe-

lant donc en général v la vîtesse finale, on aura l'espace total $s = \frac{gt}{n} + \frac{2gt}{n} + \frac{3gt}{n} + \frac{4gt}{n}$ &c. $+ \frac{vt}{n}$. Or les termes qui forment le second membre de cette équation, étant en progression arithmétique, leur somme vaut la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes; & l'on voit aisément que le nombre des termes est n, puisqu'il y a dans l'espace total autant d'espaces particuliers, qu'il y a d'intervalles dans le tems total. Donc l'équation précédente devient

$$s = \left(\frac{gt}{n} + \frac{vt}{n}\right)\frac{n}{2} = \frac{gt}{2} + \frac{vt}{2} = \frac{(g+v)t}{2};$$

& par conséquent l'espace parcouru vaut le demi-produit de la première & de la dernière vîtesse multipliées par le tems total.

CLX.

COROLLAIRE I. *La vîtesse d'un mobile qui reçoit ainsi des impulsions égales au commencement des intervalles égaux du tems, croît évidemment comme le nombre de ces intervalles.*

Car si pendant le premier intervalle elle est g, elle sera $2g$ pendant le second, $3g$ pendant le troisième, &c.

CLXI.

COROLLAIRE II. *Si la force accélératrice constante donne à chaque instant des impulsions égales, mais*

mais infiniment petites, l'espace total décrit par le mobile, sera égal au demi-produit de la vîtesse finale par le tems.

Car alors dans l'équation $S = \frac{(g+v)t}{2}$ que nous avons trouvée (*Num.* CLIX.), la quantité infiniment petite g doit doit être négligée par rapport à la vîtesse finale v: Donc on aura $s = \frac{vt}{2}$.

CLXII.

CorOLLAIRE III. *Un mobile sollicité par une force accélératrice constante, ne décrira dans un tems déterminé que la moitié de l'espace qu'il auroit parcouru, si, pendant ce tems, il avoit toujours eu sa vîtesse finalé.*

Car en donnant toujours à l'espace, au tems & à la vîtesse finale les mêmes dénominations que plus haut, on aura dans le mouvement accéléré $s = \frac{vt}{2}$. Or si le mobile avoit eu constamment la vîtesse finale, l'espace parcouru pendant le tems t eût été vt double de $\frac{vt}{2}$.

On suppose dans ce corollaire, ainsi que dans les suivants, que la force accélératrice ne donne à chaque instant que des impulsions infiniment petites.

CLXIII.

COROLLAIRE IV. *Les espaces parcourus dès commencement du mouvement, en vertu d'une fo accélératrice constante, sont comme les quarrés tems employés à les parcourir.*

Pour le démontrer, nommons p la vîtesse acqui par le mobile à la fin de la première seconde. L vîtesses étant proportionnelles aux tems (*Nun* CLX.), on pourra déterminer la vîtesse v du mobile après un tems quelconque t, en disant: un seconde est au nombre de secondes t, comme l vîtesse acquise à la fin d'une seconde, est à la vîtess acquise à la fin du tems t; c'est-à-dire, $1 : t :: p : v$ d'où l'on tirera $v = pt$. Or l'espace parcouru au bout du tems t est $s = \frac{vt}{2}$: donc en mettant à l place de v sa valeur pt, on aura $s = \frac{pt^2}{2}$.

Si l'on suppose à présent un autre tems quelconqu T pendant lequel le mobile décrive un espace S on trouvera de même $S = \frac{pT^2}{2}$. Donc $S :$ $:: \frac{pT^2}{2} : \frac{pt^2}{2}$. Doublant les deux termes de l seconde raison, & les divisant ensuite par p, restera $S : s :: T^2 : t^2$, proportion qu'il fallo démontrer.

Donc $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$; c'est-à-dire, q

dans le mouvement uniformément accéléré, les tems sont comme les racines quarrées des espaces.

CLXIV.

REMARQUE. Les deux équations $v = pt$; $s = \frac{pt^2}{2}$, trouvées dans la démonstration précédente, nous apprennent que *dans le mouvement uniformément accéléré, on a la vîtesse après un tems donné* t, *en multipliant par ce tems la vîtesse acquise au bout d'une seconde; & qu'on a l'espace décrit dans un tems* t, *en multipliant la vîtesse acquise au bout d'une seconde par le quarré de ce tems, & prenant la moitié du produit.*

CLXV.

COROLLAIRE V. *Les espaces parcourus dès le commencement du mouvement accéléré, sont comme les quarrés des vîtesses acquises en les parcourant.*

Car les espaces sont comme les quarrés des tems: or les quarrés des tems sont comme les quarrés des vîtesses, puisque les vîtesses sont proportionnelles aux tems (*Num.* CLX.).

En supposant donc que V & v soient les vîtesses acquises au bout des tems T, t, & que les espaces parcourus dès le commencement du mouvement soient S & s, on aura $S : s :: V^2 : v^2$.

D'où il suit que $V : v :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$; c'est-à-dire,

que *les vîteſſes acquiſes ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus.*

CLXVI.

COROLLAIRE VI. *Dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus pendant des tems égaux & finis qui ſe ſuivent, ſont entr'eux comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, *&c.*

En effet, nommons p la vîteſſe acquiſe à la fin d'une ſeconde, & t chacun des tems égaux qui ſe ſuivent. L'eſpace parcouru pendant le premier de ces tems, ſera $\frac{pt^2}{2}$ (*Num.* CLXIV.). Par la même raiſon l'eſpace parcouru pendant les deux premiers tems qui, pris enſemble, valent $2t$, ſera $\frac{4pt^2}{2}$. Retranchant de cet eſpace celui qui a été parcouru pendant le premier tems, il reſtera $\frac{3pt^2}{2}$ pour l'eſpace parcouru pendant le ſecond tems pris ſéparément. De même l'eſpace total parcouru pendant les trois premiers tems qui valent $3t$, ſera $\frac{9pt^2}{2}$; & retranchant de cette quantité l'eſpace $\frac{4pt^2}{2}$ parcouru pendant les deux premiers tems, il reſtera $\frac{5pt^2}{2}$ pour l'eſpace parcouru pendant le troiſième. On trouveroit de même que les eſpaces parcourus

pendant les tems ſuivants, ſeroient $\frac{7pt^2}{2}$, $\frac{9pt^2}{2}$, $\frac{11pt^2}{2}$, &c. Or il eſt évident que les quantités $\frac{pt^2}{2}$, $\frac{3pt^2}{2}$, $\frac{5pt^2}{2}$, $\frac{7pt^2}{2}$, &c., croiſſent comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

CLXVII.

COROLLAIRE VII. *Les vîteſſes acquiſes & les eſpaces parcourus dans le même tems en vertu de deux forces accélératrices conſtantes, ſont comme ces forces.*

Pour démontrer la première partie de ce corollaire, nommons g & g' les vîteſſes que produiſent à chaque inſtant les deux forces accélératrices. Les vîteſſes des deux mobiles ſollicités par ces forces, ſeront g & g' à la fin du premier inſtant; $2g$, $2g'$ à la fin du ſecond; $3g$, $3g'$ à la fin du troiſième; & en général après un nombre quelconque n d'inſtants, elles ſeront ng, ng'. Or $ng : ng' :: g : g'$. Donc les vîteſſes acquiſes au bout du même tems, ſont proportionnelles aux vîteſſes que donnent à chaque inſtant les forces accélératrices, & par conſéquent aux forces accélératrices elles-mêmes.

Pour démontrer enſuite la ſeconde partie, appelons v & v' les vîteſſes acquiſes, s & s' les eſpaces parcourus par les deux mobiles, dans le même tems t.

On aura (*Num.* CLXI.) $s = \frac{vt}{2}$, $s' = \frac{v't}{2}$; d'où l'on conclura $s : s' :: \frac{vt}{2} : \frac{v't}{2} :: v : v'$. Or on vient de voir que les vîteſſes v, v' étoient proportionnelles aux forces accélératrices : donc les eſpaces s & s ſont auſſi entr'eux comme ces forces.

CLXVIII.

LEMME. *Soit une ſuite de tant de quantités qu'on voudra*, a, a', a'', &c; b, b', b'', &c.; c, c', c'', &c.; d, d', d'', &c. *Si les ſommes priſes depuis la première juſqu'à celles qu'on voudra des ſuivantes, ſont toujours proportionnelles aux quarrés des nombres des quantités qui entrent dans ces ſommes, je dis que toutes ces quantités ſeront en progreſſion arithmétique.*

Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir qu'il y a la même différence entre tous les termes de la ſuite propoſée; que par exemple, $b'' - b' = c'' - c'$. Appelons donc s & n la ſomme & le nombre de toutes les quantités depuis la première juſqu'à b incluſivement. La ſomme juſqu'à b' incluſivement ſera $s + b'$, & le nombre des termes ſera $n + 1$. La ſomme juſqu'à b'' ſera $s + b' + b''$, & le nombre des termes ſera $n + 2$.

Donc puiſque par l'hypothèſe, une ſomme eſt à une autre ſomme quelconque, comme le quarré du

du nombre des termes qui entrent dans la première, est au quarré du nombre des termes qui entrent dans la seconde, nous aurons les deux proportions

$$s : s + b' :: n^2 : n^2 + 2n + 1,$$
$$s : s + b' + b'' :: n^2 : n^2 + 4n + 4;$$

qui donnent les deux équations

$$n^2 s + 2ns + s = n^2 s + b'n^2,$$
$$n^2 s + 4ns + 4s = n^2 s + b'n^2 + b''n^2.$$

Supprimons $n^2 s$, & après avoir doublé la première, retranchons-la de la seconde: il restera $2s = b''n^2 - b'n^2$; d'où l'on tire $b'' - b' = \frac{2s}{n^2}$.

En appelant s' & n' la somme & le nombre de toutes les quantités jusqu'à c inclusivement, on trouveroit de même $c'' - c' = \frac{2s'}{n'^2}$.

Or par l'hypothèse, $s : n^2 :: s' : n'^2$. Donc $\frac{s}{n^2} = \frac{s'}{n'^2}$, & $\frac{2s}{n^2} = \frac{2s'}{n'^2}$. Donc $b'' - b' = c'' - c'$.

CLXIX.

THÉORÈME II. *Supposons que dans un tems déterminé & divisé en plusieurs intervalles égaux, un mobile décrive un espace total, en recevant au commencement de chaque intervalle une impulsion de la force accélératrice. Si les espaces particuliers parcourus dès le premier instant jusqu'à la fin des*

différents intervalles, sont toujours proportionnels aux quarrés des nombres d'intervalles employés à les parcourir, toutes les impulsions de la force accélératrice seront égales entr'elles.

En effet, soient a, a', a'', *&c.*; b, b', b'', *&c.*; c, c', c'', *&c.*; d, d', d'', *&c.*, différents espaces dont chacun soit parcouru pendant un intervalle de tems, de manière que a soit parcouru pendant le premier intervalle, a' pendant le second, a'' pendant le troisième, & ainsi des autres. Il est évident que si que si l'on prend la somme s de toutes les quantités jusqu'à b inclusivement, on aura l'espace total parcouru pendant autant d'intervalles de tems que l'on aura pris de quantités. Car puisqu'il répond un intervalle de tems à chaque quantité, le nombre des intervalles de tems est nécessairement le même que celui des quantités que l'on aura prises. On pourra dire la même chose d'une autre somme quelconque s', qui comprendroit toutes les quantités jusqu'à c. Donc si l'on appelle n & n' les nombres des quantités depuis la première jusqu'à deux autres quelconques b & c; n & n' exprimeront aussi les tems employés à parcourir ces quantités.

Maintenant, par l'hypothèse, on a la proportion $s : s' :: n^2 : n'^2$. Or nous venons de démontrer dans le lemme précédent, que lorsqu'on a une série dans laquelle les sommes sont proportionnelles aux quarrés des nombres des termes ajoutés pour les

faire, tous ces termes sont en progression arithmétique: donc les espaces a, a', a'', &c.; b, b', b'', &c.; c, c', c'', &c., formeront une progression arithmétique. Si l'on divise chacun de ces espaces par l'intervalle de tems employé à le parcourir, les quotients donneront encore une progression de même espèce, & marqueront les vîtesses qu'aura le mobile en parcourant ces espaces. Or les vîtesses ne peuvent pas être en progression arithmétique, à moins que le mobile ne reçoive à chaque intervalle de tems, un incrément égal de vîtesse, & que par conséquent toutes les impulsions de la force accélératrice ne soient égales.

CLXX.

COROLLAIRE. *Si un mobile sollicité par une force accélératrice reçoit à chaque instant des impulsions infiniment petites, & que les espaces parcourus dès le commencement du mouvement soient comme les quarrés des tems employés à les parcourir, la force accélératrice sera constante.*

Car le théorème que nous venons de démontrer est vrai, quelque petits qu'on suppose les intervalles dans lesquels sont parcourus les espaces a, a', a'', &c.; b, b', b'', &c. Donc il sera encore vrai, si l'on suppose que ces intervalles ne soient que des instants ou tems infiniment petits, & dans ce cas particulier la force accélératrice donnera au

mobile à chaque instant des impulsions égales. Donc elle sera une force accélératrice constante.

CLXXI.

THÉORÈME III. *Si un corps, après s'être mu d'un mouvement accéléré, est repoussé en sens contraire avec une vîtesse initiale, égale à celle qu'il a au dernier instant du premier mouvement, & qu'il éprouve l'action d'une force retardatrice égale à celle qui l'accéléroit pendant ce même mouvement; il retournera, pendant ce même tems, au point d'où il étoit parti, & alors il aura perdu toute sa vîtesse.*

Cela est évident par soi-même; puisque dans le second mouvement la force retardatrice doit enlever successivement au corps les mêmes degrés de vîtesse qui lui avoient été communiqués par la force accélératrice, dans le premier mouvement.

Du Mouvement des Corps pesants qui tombent suivant des lignes verticales.

CLXXII.

DES expériences faites avec beaucoup d'exactitude par les PP. *Riccioli* & *Grimaldi* *, nous

* Comme la chute verticale est très-rapide, je ne dois pas dissimuler que ces expériences sont bien délicates. Pour donner plus de tems à l'observation, Galilée fit rouler des corps sphériques sur des plans inclinés, & trouva que les

apprennent que si l'on abandonne à eux-mêmes des corps pesants, & qu'on les laisse tomber suivant la ligne verticale, ils parcourront des espaces très-sensiblement proportionnels aux quarrés des tems écoulés dès le commencement des chutes. Donc (*Num.* CLXX.) on peut considérer la gravité comme une force accélératrice constante, & appliquer au mouvement libre des corps pesants, tout ce qu'on vient de démontrer sur le mouvement uniformément accéléré ou retardé en général.

1° On peut conclure que les vîtesses acquises sont comme les tems écoulés dès le commencement du mouvement (*Num.* CLX.).

2° Elles sont comme les racines quarrées des espaces parcourus (*Num.* CLXV.).

3°. L'espace parcouru par un corps qui tombe librement, est égal au demi-produit de la vîtesse finale par le tems (*Num.* CLXI.).

4° L'espace que décrit un corps pesant pendant un tems déterminé, n'est que la moitié de celui

---

espaces parcourus, pris dès le commencement de la chute, étoient toujours comme les quarrés des tems écoulés : d'où il suit que la force qui fait descendre un corps sur un plan incliné, est une force accélératrice constante. Or nous démontrerons (*Num.* CLXXVII.) que cette force est à la pesanteur, comme la hauteur du plan est à sa longueur. Donc aussi la pesanteur doit être considérée comme une force accélératrice constante.

mobile à chaque instant des impulsions égales. Donc elle sera une force accélératrice constante.

CLXXI.

THÉORÈME III. *Si un corps, après s'être mu d'un mouvement accéléré, est repoussé en sens contraire avec une vitesse initiale, égale à celle qu'il a au dernier instant du premier mouvement, & qu'il éprouve l'action d'une force retardatrice égale à celle qui l'accéléroit pendant ce même mouvement; il remontera, pendant ce même tems, au point d'où il étoit parti, & alors il aura perdu toute sa vitesse.*

Cela est évident par soi-même; puisque dans le second mouvement la force retardatrice doit enlever successivement au corps les mêmes degrés de vitesse qui lui avoient été communiqués par la force accélératrice, dans le premier mouvement.

Du Mouvement des Corps pesants qui tombent suivant des lignes verticales.

CLXXII.

Des expériences faites avec beaucoup d'exactitude par les PP. Riccioli & *Grimaldi* *, nous

---

* Comme la chute verticale est très-rapide, je ne dois pas dissimuler que ces expériences sont bien delicates. Pour [illegible]. Galilée fit rouler des [illegible] sur des plans inclinés, & trouva que les

qu'il décriroit, ſi pendant ce tems il avoit conſtamment la vîteſſe finale (*Num.* CLXII.).

5° Les eſpaces parcourus dès le commencement de la chute, en des tems différents, ſont comme les quarrés des vîteſſes finales (*Num.* CLXV.).

6° Les eſpaces parcourus dans des tems égaux & finis qui ſe ſuivent, ſont entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. (*Num.* CLXVI.).

7° Les tems comptés depuis le commencement de la chute, ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus, (*Num.* CLXIII.).

8° Un corps peſant remontera à la hauteur d'où il eſt tombé, s'il eſt repouſſé en haut verticalement par une force qui lui communique une vîteſſe égale à celle qu'il avoit acquiſe en deſcendant; (*Num.* CLXXI.).

9° Si la vîteſſe acquiſe au bout d'une ſeconde eſt p, la vîteſſe acquiſe au bout d'un tems quelconque t, ſera $v = pt$, (*Num.* CLXIV.); & l'eſpace parcouru à la fin de ce tems ſera $s = \frac{pt^2}{2}$, le tems t étant exprimé en ſecondes.

Pour déterminer la valeur de p, on obſervera qu'un corps qui tombe librement, parcourt 15,1 pieds pendant la première ſeconde. Or ſi, pendant cette ſeconde, il avoit eu conſtamment la vîteſſe finale p, il auroit parcouru un eſpace double, c'eſt-à-dire, 30,2 pieds, (*Num.* CLXII.): Donc p eſt

une vîtesse en vertu de laquelle le corps parcourroit 30,2 pieds par seconde.

Si l'on prend la valeur de t dans l'équation $v=pt$, & qu'on la substitue dans l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$, on trouvera $s=\frac{v^2}{2p}$; & au moyen des trois équations $v=pt$, $s=\frac{pt^2}{2}$, $s=\frac{v^2}{2p}$, connoissant l'une de ces trois quantités, la vîtesse acquise par un corps pesant, la hauteur d'où il est tombé, le tems pendant lequel il est tombé, on trouvera facilement les deux autres. Connoissant le tems, on trouvera la vîtesse par l'équation $v=pt$, & l'espace par l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$. Connoissant l'espace, on trouvera la vîtesse par l'équation $s=\frac{v^2}{2p}$, & le tems par l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$. Enfin, connoissant la vîtesse, on trouvera le tems par l'équation $v=pt$, & l'espace par l'équation $s=\frac{v^2}{2p}$. Appliquons ces formules générales à quelques problèmes particuliers.

CLXXIII.

PROBLÈME I. *Un mobile* A *est tombé librement pendant 6 secondes : trouver la vîtesse acquise & la hauteur d'où il est tombé.*

SOLUTION. Ce problème se résout par les formules $v = pt$, $s = \frac{pt^2}{2}$. La première donne $v = 30,2 \times 6 = 181,2$. La seconde donne $s = \frac{30,2 \times 36}{2} = 543,6$. Le corps a donc acquis une vîtesse en vertu de laquelle il parcourroit 181,2 pieds par seconde, & il est tombé d'une hauteur de 543,6 pieds.

CLXXIV.

PROBLÈME II. *Un mobile* A *tombant librement, a acquis une vîtesse en vertu de laquelle il parcourroit* 120,8 *pieds par seconde. On demande la hauteur d'où il est tombé, & le tems employé à la parcourir.*

SOLUTION. Pour trouver la hauteur demandée, j'emploie la formule $s = \frac{v^2}{2p}$, qui devient $s = \frac{\overline{120,8}^2}{60,4} = 241,6$. Pour trouver le tems, j'emploie la formule $v = pt$, qui devient $120,8 = 30,2t$; d'où je tire $t = 4$. Le corps est donc tombé d'une hauteur de 241,6 pieds, & il a mis 4 secondes à tomber de cette hauteur.

CLXXV.

PROBLÈME III. *Un mobile est tombé librement d'une hauteur de* 60,4 *pieds : on demande la*

vîteſſe qu'il a acquiſe, & le tems qu'il a employé à tomber de cette hauteur.

Solution. La vîteſſe acquiſe ſe trouvera par la formule $s = \frac{v^2}{2p}$, qui devient ici $60,4 = \frac{v^2}{60,4}$, & qui donne $v = 60,4$ pieds. Le tems pendant lequel le corps eſt tombé ſe trouvera par la formule $s = \frac{pt^2}{2}$, qui devient $60,4 = \frac{30,2 \times t^2}{2}$, d'où l'on tire $t = 2$ ſecondes. La vîteſſe finale eſt donc de 60,4 pieds, & le mobile eſt tombé pendant 2 ſecondes.

CLXXVI.

Problème IV. *Quelle vîteſſe faudroit-il donner au mobile* A, *pour le faire monter verticalement à la hauteur de* 1223,1 *pieds?*

Solution. Pour trouver cette vîteſſe, il faut chercher par l'équation $s = \frac{v^2}{2p}$, celle que le mobile eût acquiſe en tombant de la hauteur propoſée. On aura $1223,1 = \frac{v^2}{60,4}$, d'où l'on tirera $v = 271,8$ pieds. Il eſt évident (*Num.* CLXXI.), qu'en donnant cette vîteſſe au mobile, il s'élèvera juſqu'à la hauteur de 1223,1 pieds; puiſque ſon mouvement doit être retardé en montant, comme il ſeroit accéléré en deſcendant.

Du Mouvement des Corps pesants le long des plans inclinés.

CLXXVII.

THÉORÈME. *Un corps qui descend sur un plan incliné, est sollicité dans son mouvement par une force accélératrice constante, qui est à la gravité, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

Pour le démontrer, soit (*Fig.* 86.) le mobile *M* qui descend le long du plan incliné *AB*. Que la gravité soit représentée par la ligne verticale *CG*, & que l'on achève le parallélogramme *CEGF*, en menant des points *C* & *G* les lignes *CF*, *GE* parallèles au plan incliné, & les lignes *CE*, *GF* perpendiculaires au même plan. Il est évident que la force *CG* pourra se décomposer en deux autres *CE* & *CF*, dont la première perpendiculaire au plan sera détruite par sa résistance, tandis que la seconde *CF* subsistera toute entière, & fera descendre le mobile. Comparant à présent les deux triangles *CFG*, *ADB*, on voit qu'ils sont rectangles, & que de plus les angles *DAB*, *GCF* compris entre des côtés parallèles, sont égaux. Donc ils sont semblables; & leurs côtés homologues donnent la proportion, *CF* : *CG* :: *AD* : *AB*; c'est-à-dire, la force qui accélère le mouvement du corps le long du plan incliné, est à la gravité, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

Les

Les trois derniers termes de cette proportion étant toujours les mêmes, en quelque point du plan incliné qu'on suppose le mobile, il s'ensuit que le premier terme a toujours même valeur, & que par conséquent la force accélératrice le long du plan est constante.

CLXXVIII.

COROLLAIRE I. *Donc on peut appliquer à la descente des corps le long des plans inclinés, tout ce qu'on a démontré plus haut sur le mouvement uniformément accéléré.* On peut conclure, dis-je, que dans le mouvement sur les plans inclinés, les vîtesses acquises sont comme les tems; les espaces parcourus comme les quarrés des tems; &c.

CLXXIX.

COROLLAIRE II. *Si d'un point* L (Fig. 86.), *pris dans la hauteur du plan incliné, on abaisse sur sa longueur une perpendiculaire* LH, *le mobile qui descend le long du plan incliné, arrivera au point* H, *dans le même tems qu'il arriveroit au point* L *en tombant verticalement.*

Car appelons t le tems que le mobile employeroit à parcourir AL, & soit s l'espace qu'il parcourroit dans le même tems en descendant le long du plan incliné. L'espace AL sera à l'espace s, comme la gravité est à la force accélératrice le long du

plan incliné (*Num.* CLXVII.) ; c'eſt-à-dire ; comme la longueur du plan incliné eſt à ſa hauteur (*Num.* CLXXVII.). Donc on aura *AL* : *s* :: *AB* : *AD*. Or *AB* : *AD* :: *AL* : *AH*, à cauſe de la ſimilitude des triangles rectangles *ADB*, *AHL*, qui ont un angle commun en *A*. Donc *AL* : *s* :: *AL* : *AH*. Les deux antécédents étant égaux dans cette proportion, il faut que l'on ait $s = AH$; & par conſéquent l'eſpace parcouru ſur le plan incliné pendant le tems *t*, eſt préciſément la partie compriſe entre le point *A* & le point *H* où tombe la perpendiculaire *LH*.

CLXXX.

COROLLAIRE III. *Dans un cercle, toutes les cordes tirées de l'une des extrémités d'un diamètre vertical, ſont parcourues dans le même tems que ce diamètre.*

Pour le démontrer, prenons une corde quelconque *AI* (*Fig.* 87.), tirée de l'extrémité ſupérieure *A* du diamètre vertical. Si de l'extrémité inférieure *L* du même diamètre, on mène la ligne *LI*, elle ſera évidemment perpendiculaire ſur la corde, puiſque l'angle *AIL* appuyé ſur le diamètre eſt droit. Donc (*Num.* CLXXIX.) un mobile employeroit le même tems à décrire le plan incliné *AI*, qu'à parcourir la ligne verticale *AL*.

Il ſuit de là, que toutes les cordes tirées de l'ex-

trémité supérieure du diamètre vertical, feroient parcourues dans le même tems.

Il est aisé de démontrer la même chose pour les cordes telles que *GL*, que l'on tireroit de l'extrémité inférieure du même diamètre. Car ayant mené par le point *A* la corde *AH*, parallèle à *GL*, ces deux cordes qui feront des angles égaux avec le diamètre *AL*, feront égales & également inclinées à l'horizon. Donc *GL* fera parcourue dans le même tems que *AH*, & par conséquent dans le même tems que le diamètre *AL*.

CLXXXI.

COROLLAIRE IV. *La hauteur & la longueur d'un plan incliné font entr'elles comme les tems employés à les parcourir.*

Car ayant abaissé du point *B* (*Fig.* 86.), perpendiculairement à la longueur, la ligne *BL'* jusqu'à la rencontre de la hauteur prolongée; nommons t le tems employé à parcourir la hauteur *AD*, t' le tems employé à parcourir la longueur *AB*, & par conséquent (*Num.* CLXXIX.), celui qui feroit nécessaire pour parcourir verticalement *AL'*. Les espaces *AD*, *AL*, font entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir (*Num.* CLXIII.). Donc $t^2 : t'^2 :: AD : AL'$. Or $AL' = \frac{\overline{AB}^2}{AD}$: car dans le triangle rectangle ABL', $\overline{AB}^2$

$= AD \times AL'$. Donc $t^2 : t'^2 :: AD : \frac{\overline{AB}^2}{AD} :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$. Donc $t : t' :: AD : AB$.

CLXXXII.

COROLLAIRE V. *La vîteſſe acquiſe par un corps peſant qui parcourt la hauteur d'un plan incliné, eſt égale à celle qu'il acquerroit en parcourant la longueur du même plan.*

En effet, nommons v la vîteſſe acquiſe en parcourant la hauteur AD (*Fig.* 86.), v' la vîteſſe acquiſe en parcourant la longueur AB, & enfin v'' la vîteſſe qu'un mobile acquerroit en parcourant la ligne AL'. On aura d'abord $v' : v'' :: AD : AB$; parce que les lignes AB & AL étant parcourues dans le même tems, les vîteſſes acquiſes en les parcourant ſont comme les forces accélératrices, qui ſont elles-mêmes dans le cas préſent, comme AD eſt à AB (*Num.* CLXXVII.). Mais les eſpaces AD, AL' ſont comme les quarrés des vîteſſes acquiſes en les parcourant (*Num.* CLXV.). Donc

$$v^2 : v''^2 :: AD : AL' :: AD : \frac{\overline{AB}^2}{AD} :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2.$$

Donc auſſi $v : v'' :: AD : AB$; & par conſéquent $v : v'' :: v' : v''$. Donc enfin $v = v'$.

On voit par là, que ſi l'on avoit pluſieurs plans de même hauteur, mais différemment inclinés, les

vîtesses acquises en parcourant leurs longueurs, seroient égales entr'elles. Car chacune de ces vîtesses seroit égale à celle d'un corps, qui auroit parcouru la hauteur commune.

CLXXXIII.

COROLLAIRE VI. *Les longueurs de deux plans également inclinés, sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir.*

Car si les plans sont également inclinés, la force accélératrice le long du premier, est égale à la force accélératrice le long du second; & par conséquent les mobiles qui parcourent leurs longueurs sont dans le même cas, que s'ils descendoient sur un seul & même plan. Donc (*Num.* CLXXVIII.) les espaces parcourus, ou les longueurs des deux plans, sont comme les quarrés des tems.

Du mouvement des corps pesants le long des surfaces courbes.

CLXXXIV.

LEMME. *Si un mobile sans pesanteur se meut dans un plan vertical le long du périmètre d'un polygone; il perdra en passant d'un côté au suivant, une partie de sa vîtesse, qui sera à la vîtesse qu'il avoit, comme le sinus verse de l'angle formé par l'un de ces côtés & par le prolongement de l'autre, est au sinus total.*

En effet, ſoit un polygone *ABCX* (*Fig.* 88.), dont les côtés ſoient diſpoſés dans un plan vertical. Sur le prolongement du côté *AB*, prenons *BF* pour repréſenter la vîteſſe qu'avoit le mobile en allant de *A* en *B*. On peut décompoſer cette vîteſſe en deux autres, l'une *BE* perpendiculaire au côté *BC*, l'autre *BD* ſuivant la direction de ce côté; & le mobile à la rencontre de *BC* ne pouvant obéir à la première de ces vîteſſes, il eſt évident que la ſeconde *BD* ſera la ſeule qui ſubſiſtera. Cela poſé, ſi du point *B* pris pour centre, on décrit avec un rayon *BF* l'arc *FI*; la ligne *DI* repréſentera la différence des vîteſſes *BF* & *BD*, ou ce que le mobile a perdu de vîteſſe à la rencontre du côté *BC*: ainſi la vîteſſe perdue eſt à la vîteſſe primitive, comme *DI* eſt à *BF*. Or *DI* eſt à *BF*, comme le ſinus verſe de l'angle *CBF* que forme le ſecond côté avec le prolongement du premier, eſt au ſinus total. Donc la vîteſſe perdue eſt à celle qu'avoit le mobile avant de rencontrer le côté *BC*, comme le ſinus verſe de l'angle que forme ce côté avec le précédent prolongé, eſt au ſinus total.

CLXXXV.

Corollaire I. *Donc ſi un corps ſans peſanteur ſe meut le long d'une ligne courbe dont tous les points ſoient dans le même plan vertical, la vîteſſe qu'il perdra à la rencontre de chaque élé-*

ment de la courbe, ne sera qu'une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à la vîtesse primitive.

Car on peut considérer une courbe quelconque, comme un polygone d'une infinité de côtés dont chacun est infiniment petit, & fait un angle infiniment petit avec le prolongement du côté contigu : donc à la rencontre de chacun de ces côtés, la vîtesse perdue sera à la vîtesse qu'avoit le mobile, comme le sinus verse d'un angle infiniment petit est au sinus total. Or le sinus verse d'un angle infiniment petit, est une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport au sinus total : donc aussi ce qu'un mobile perd de sa vîtesse à la rencontre de chaque élément de la courbe, n'est qu'une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à la vîtesse entière.

Pour démontrer que le sinus verse d'un angle infiniment aigu, est une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport au sinus total, prenons dans le cercle des tables ADB (*Fig.* 89.) un arc infiniment petit AD, qui soit la mesure de l'angle infiniment aigu ACD; & du point D menons la perpendiculaire DI sur le diamètre BA. Cette perpendiculaire sera infiniment petite, ainsi que l'arc AD; & l'on aura $BI : DI :: DI : AI$. Donc puisque la ligne DI est contenue une infinité de fois dans BI, le sinus verse AI sera contenu une

infinité de fois dans la ligne infiniment petite du premier ordre *DI*, & par conféquent il fera une quantité infiniment petite du fecond ordre, par rapport à une ligne finie, telle que le rayon ou finus total.

CLXXXVI.

COROLLAIRE II. *Si un corps fans pefanteur fe meut fur une ligne courbe, il confervera la même vîteffe dans tous les points de cette ligne.*

Car un arc fini *AB* de cette courbe (*Fig.* 90.) eft compofé d'une infinité de côtés, & la vîteffe que perd le mobile à la rencontre de chacun de ces côtés, n'eft qu'une vîteffe infiniment petite du fecond ordre. Donc la vîteffe perdue en parcourant l'arc *AB*, ne peut être qu'une quantité infiniment petite du fecond ordre, répétée une infinité de fois ; ce qui ne donne qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. Donc la vîteffe que perd le mobile en venant de *A* en *B*, eft moindre que toute vîteffe finie, quelque petite qu'on voulût la fuppofer ; & par conféquent on doit confidérer le mobile comme ayant conftamment la même vîteffe dans tous les points de la courbe.

CLXXXVII.

THÉORÈME. *Si un corps pefant defcend dans un plan vertical fur une furface courbe, il aura, en quelque point que ce foit, la même vîteffe, que s'il étoit tombé librement de la même hauteur.*

En effet, que le mobile décrive ſur la ſurface courbe une ligne *ANX*, (*Fig.* 91.), dont tous les points ſoient dans un même plan vertical. Que *AB*, *BC*, *CD*, &c., ſoient les premiers côtés infiniment petits de la courbe, & qu'on prolonge *BC*, *CD* juſqu'aux points *E*, *F*, du plan horizontal *HI*, mené par l'extrémité *A* du premier côté.

1° Le mobile, en décrivant le plan incliné infiniment petit *AB*, acquerra la même vîteſſe, qu'en tombant verticalement de la hauteur de ce plan (*Num.* CLXXXII.).

2° La vîteſſe du mobile en *B*, eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe en parcourant le plan incliné *EB* de même hauteur que *AB*, & cette vîteſſe n'eſt point altérée à la rencontre du côté *BC* (*Num.* CLXXXVI.). Donc puiſque la gravité continue à agir ſur le mobile, tandis qu'il décrit *BC*, ſa vîteſſe s'accélérera & ſera la même au point *C*, que s'il étoit tombé le long du plan incliné *EC*, ou que s'il avoit décrit librement la hauteur de ce plan. Donc en arrivant au point *C*, il aura une vîteſſe égale à celle qu'il eût acquiſe en tombant verticalement dès le plan horizontal *HI* juſqu'en *C*.

3° On peut faire un raiſonnement ſemblable pour tous les éléments ſuivants de la courbe. Donc en un point quelconque *N*, le mobile aura la même vîteſſe, que s'il étoit tombé verticalement dès le plan horizontal *HI* juſqu'en *N*.

CLXXXVIII.

Remarque. La nature de la courbe que décrit le mobile étant donnée, on emploie ordinairement le calcul infinitésimal, pour déterminer le tems de la chute par un arc quelconque. On se sert du même calcul pour résoudre les différents problèmes où il s'agit de trouver la nature de la courbe, d'après quelque condition donnée; comme si l'on proposoit de trouver entre deux points donnés, la courbe parcourue dans le moindre tems possible, par un corps soumis à l'action de la pesanteur, ou celle dans laquelle un corps pesant arrive toujours au point le plus bas dans le même tems, quel que soit le point de la courbe d'où il ait commencé à descendre, &c. Ces problèmes sont trop sublimes pour entrer dans un ouvrage aussi élémentaire que l'est celui-ci.

Du Mouvement des Projectiles.

CLXXXIX.

On appelle *mouvement des projectiles*, celui que prennent les corps qui, ayant été lancés avec une force quelconque, sont ensuite abandonnés à l'action de leur pesanteur, & à la résistance du fluide qui remplit l'espace ou le milieu dans lequel ils se meuvent, lorsque ce milieu est occupé par un fluide. Tel est le mouvement d'une pierre jetée avec la main ou avec une fronde, d'une flèche qui part

d'un arc, d'un boulet qui ſort d'un canon, &c. Nous avons déjà déterminé les loix ſuivant leſquelles ſe meuvent ces projectiles, lorſqu'ils ſont lancés verticalement. Il nous reſte à examiner ici les circonſtances de leur mouvement, dans le cas où ils ſont lancés ſuivant une direction qui n'eſt pas verticale. Nous ferons encore précíſion de la réſiſtance des milieux.

Il eſt d'abord évident qu'un corps ainſi projeté doit décrire une ligne courbe. Car en ſuppoſant que dans un inſtant il ait décrit la ligne infiniment petite ab (*Fig.* 92.), il décriroit dans l'inſtant ſuivant la ligne $bc = ab$, ſans changer de direction, ſi au point b il ne recevoit aucune nouvelle impulſion; mais en b la gravité lui donne néceſſairement une impulſion be qui le porte vers le centre de la terre, & qui fait un angle avec la ligne bc. Donc ſi l'on achève le parallélogramme $bcde$, le mobile en décrira la diagonale bd, & s'écartera ainſi de la direction qu'il avoit dans l'inſtant précédent. Il décrira donc une ligne courbe, dont il s'agit de déterminer la nature.

CXC.

THÉORÈME. *Un projectile lancé ſuivant une direction qui n'eſt pas verticale, décrit dans l'eſpace une ligne parabolique.*

En effet, qu'un mobile ſoit lancé du point A

(*Fig.* 93.) ſuivant la direction *A Z*, & que la force de projection ſoit repréſentée par la ligne *A l*, ou, ce qui revient au même, que la force de projection demeurant la même, ſoit capable de faire parcourir au corps l'eſpace *A l* pendant l'unité de tems, par exemple, pendant une ſeconde. On peut décompoſer cette force *Al* en deux autres, l'une verticale *A h*, l'autre horizontale *Ag*, & concevoir le mobile comme animé de ces deux forces & de ſa peſanteur. Or la direction verticale de la peſanteur & de la force *A h* étant perpendiculaire à la direction de la force horizontale *Ag*, la vîteſſe produite par cette dernière force ne peut être augmentée ni diminuée par les deux premières (*Num.* XIV.). Donc la vîteſſe dans le ſens horizontal, ſera uniforme, & les eſpaces parcourus horizontalement ſeront comme les tems employés à les parcourir. Pareillement la force verticale *A h*, qui fait monter le corps, ne ſera point altérée par la force horizontale *Ag*, qui lui eſt perpendiculaire; mais elle le ſera continuellement par les impulſions contraires de la peſanteur, & le mouvement vertical ſera uniformément retardé; de manière que le corps, au lieu d'arriver au bout d'un tems donné à quelque point *L*, ne s'élèvera que juſqu'à un point plus bas *M*, & que bientôt la force *A h* étant totalement détruite, il ſera forcé de deſcendre en vertu de ſa peſanteur. Il décrira par conſéquent une ligne

courbe ASB, dans laquelle on pourra prendre pour axe des abscisses la ligne verticale SC, qui passe par le point le plus élevé S; & pour ordonnées les lignes horizontales EN, DM, &c. menées des différens points de cet axe, jusqu'à la rencontre de la courbe.

Supposons à présent que le mobile doive employer le tems t pour aller de M en S le long de la courbe qu'il décrit, & le tems t' pour aller de N en S. Les espaces dont il montera pendant ces deux tems, seront respectivement DS & ES, & les espaces parcourus dans le sens horizontal pendant les mêmes tems, seront MD, NE. Or les espaces DS, ES sont les mêmes que ceux que décriroit le corps en descendant verticalement pendant les tems t, t' (Num. CLXXI.): donc ils sont comme les quarrés de ces tems, & par conséquent on a $DS : ES :: t^2 : t'^2$. Mais puisque les espaces décrits horizontalement sont comme les tems, on a $MD : NE :: t : t'$, ou $\overline{MD}^2 : \overline{NE}^2 :: t^2 : t'^2$. Donc $DS : ES :: \overline{MD}^2 : \overline{NE}^2$; ce qui fait voir que dans la courbe décrite par le mobile, les abscisses DS, ES sont proportionnelles aux quarrés des ordonnées correspondantes MD, NE; propriété qui ne convient qu'à la parabole.

Cette démonstration fait voir que le mobile, en montant jusqu'en S, décrit une demi-parabole;

ou point qu'on veut frapper, son élévation au-dessus de l'horizon, trois étant connues, trouver la quatrième.

En effet, soit C (*Fig.* 94.) le but auquel on veut frapper. En nommant, comme dans le problème précédent, y son élévation CE, x sa distance horizontale AE, v la vîtesse que donne la force de projection, N la tangente de l'angle de projection; le rapport entre les quatre quantités x, y, v, N, sera exprimée par l'équation

$$Nx - \frac{pN^2x^2 - px^2}{2v^2} = y,$$

dans laquelle p marque la vîtesse acquise à la fin d'une seconde par un corps qui tombe verticalement. Donc si des quatre quantités x, y, v, N, trois sont connues, il suffira de résoudre l'équation, pour trouver la quatrième.

Que l'on se propose, par exemple, de faire tomber une bombe au point C, dont la distance horizontale x & l'élévation verticale y soient données: que l'on connoisse aussi la vîtesse v, que la force de la poudre est capable de communiquer à la bombe. Pour trouver la tangente N de l'angle sous lequel on doit diriger le mortier, il ne s'agira que de résoudre une équation du second degré, qui donnera $N = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - p^2x^2 - 2pv^2y}}{px}$. La

tangente

tangente N étant ainsi déterminée, on cherchera dans les tables des sinus & des tangentes l'angle qui lui répond. Ce sera l'angle de projection.

On peut observer que la quantité N a deux valeurs, à cause du signe $\pm$ qui se trouve avant le radical du second membre: d'où il suit que l'on peut frapper le but, en dirigeant le projectile sous deux angles différents.

On peut observer encore au sujet de ces valeurs de N, qu'elles seront imaginaires, si la quantité comprise sous le signe radical est négative; ce qui arrivera lorsque la vitesse v sera trop petite par rapport aux quantités x, y. Donc alors il ne sera pas possible d'atteindre le but, sous quelqu'angle qu'on dirige le projectile.

CXCIII.

REMARQUE. On peut déduire très-simplement de l'équation $Nx - p(N^2+1)x^2 = y$, toute la balistique ordinaire, où l'on suppose les projectiles lancés dans un milieu non résistant. Les Géomètres ont aussi fait des recherches intéressantes pour déterminer les loix du mouvement des projectiles, en ayant égard à la résistance des milieux: mais il faut avouer que la pratique n'a pas jusqu'ici retiré de ces sublimes spéculations tout l'avantage qu'on en peut espérer.

Du Mouvement des Pendules.

CXCIV.

UN *pendule* eſt un fil ou une verge infléxible, qui tient un ou pluſieurs poids ſuſpendus ou attachés à un point fixe, autour duquel ils peuvent tourner librement. Le pendule eſt *composé*, ſi le fil infléxible ſoutient pluſieurs poids fixés de manière à conſerver la même diſtance tant les uns des autres, que du centre de ſuſpenſion : il eſt *ſimple*, ſi l'on conſidère le fil comme n'ayant aucune peſanteur, & qu'il ne ſoutienne qu'un ſeul corps conſidéré comme un point peſant. On voit par là, qu'à proprement parler, il n'exiſte aucun pendule ſimple dans la nature, puiſqu'il n'exiſte ni fil ſans peſanteur, ni corps ſans étendue ; & que par conſéquent un poids quelconque ſuſpendu au fil d'un pendule, eſt composé d'une infinité, pour ainſi dire, de corpuſcules qui ne ſont pas tous également éloignés du point fixe. On ne laiſſe pourtant pas de conſidérer d'abord le pendule comme abſolument ſimple, 1° parce que les loix de ſon mouvement étant déterminées, il eſt aiſé d'en conclure celles du mouvement dans le pendule composé ; 2° parce qu'un pendule dans lequel un fil très-mince & très-léger ſoutient un poids qui a beaucoup de maſſe ſous un volume peu conſidérable, ſe meut à très-peu près de la même manière qu'un pendule abſolument ſimple.

CXCV.

Théorème I. *Dans un pendule ſimple* CP (Fig. 95.), *qui fait un angle avec la verticale* CA, *le poids* P *doit deſcendre d'un mouvement accéléré juſqu'à cette verticale ; & la force accélératrice à chaque inſtant eſt à la gravité, comme le ſinus de l'angle formé par la verticale & par la direction du pendule eſt au ſinus total.*

En effet, ſoit repréſentée la gravité par la petite ligne verticale *Pg*: on pourra décompoſer cette force en deux autres, l'une *Ph* ſuivant le fil du pendule prolongé, l'autre *Pf* perpendiculaire à la direction du pendule, & ſuivant la direction de l'arc au point *P*. La première ſera détruite par la réſiſtance du fil *PC*, la ſeconde accélérera le mouvement du poids. Or deux puiſſances compoſantes & leur réſultante étant entr'elles chacune comme le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres (*Num.* XIX.), on aura *Pf* : *Pg* :: ſin. *hPg* : ſin. *hPf* :: ſin. *PCA* : ſin. tot. Donc la force qui accélère le mouvement du poids, eſt à la gravité, comme le ſinus de l'angle que fait la verticale avec la direction du pendule eſt au ſinus total.

On peut remarquer que le poids *P* du pendule ſe meut exactement comme s'il deſcendoit naturellement le long de l'arc *PA*, qui a pour rayon la

longueur *CP* du pendule. Car dans dans ce dernier cas, la gravité *Pg* pourroit se décomposer aussi en deux forces, l'une *Ph* perpendiculaire à l'arc, & détruite par sa résistance ; l'autre *Pf* suivant la direction de l'arc au point *P*, qui feroit tomber le corps, & qui seroit la même que celle qui accélère son mouvement dans le pendule.

CXCVI.

Corollaire. La vîtesse du poids sera donc accélérée jusqu'au point *A*; & comme étant arrivé à ce point, il ne pourra continuer son mouvement qu'en montant le long de l'arc *AP'*, il est visible que sa vîtesse sera retardée de la même manière dont elle avoit été accélérée de *P* en *A*. C'est pourquoi non seulement il décrira l'arc $AP' = AP$, en s'élevant à la même hauteur dont il étoit descendu, mais de plus ces deux arcs seront décrits dans des tems égaux ; & lorsqu'il sera arrivé en *P'*, il aura perdu toute sa vîtesse. Donc il redescendra le long de l'arc *P'A* pour remonter jusqu'en *P*, & ainsi de suite à l'infini.

Il faut pourtant observer que dans l'état physique, la résistance de l'air & le frottement autour du point *C*, détruiront une partie de la force acquise en tombant : ainsi le pendule ne remontera pas précisément au même point d'où il étoit descendu. Il décrira des arcs qui diminueront de plus en plus,

& finira par demeurer en repos dans la direction verticale, qui est sa direction naturelle.

Chaque allée du pendule, depuis un point quelconque P jusqu'au point P', où il cesse de monter pour redescendre, s'appelle une *oscillation* ou une *vibration*. On donne aussi le même nom au retour depuis le point P' jusqu'au point P.

CXCVII.

THÉORÈME II. *Les oscillations d'un pendule simple qui décrit de très-petits arcs de cercle, sont sensiblement isochrones, c'est-à-dire, de même durée.*

Pour le démontrer, soient PA, XA les arcs très-petits que le pendule décrit dans deux demi-oscillations différentes; & concevons que le premier de ces arcs soit divisé en autant de parties égales & infiniment petites que le second. Il est évident que les demi-oscillations seront isochrones, si chaque partie du premier arc est parcourue dans le même tems que la partie correspondante du second. Or c'est ce qui doit arriver très-sensiblement quand les arcs sont très-petits. En effet, une partie quelconque du premier arc PA sera décrite dans le même tems que la partie correspondante du second, si les vîtesses dont le poids est animé en les décrivant, sont toujours proportionnelles à ces parties: car il est évident qu'une ligne double, triple, quadruple, &c.

d'une autre, sera parcourue dans le même tems que celle-ci, pourvu que la première soit parcourue avec une vîtesse double, triple, quadruple, &c. Or les vîtesses dont le poids est animé en parcourant deux parties correspondantes dans les deux arcs circulaires dont il s'agit, sont toujours proportionnelles à ces parties.

Pour le faire voir, nommons p la vîtesse que donne une impulsion de la pesanteur, g la vîtesse que donne la force accélératrice au point P d'où le corps part pour décrire le premier arc, g' la vîtesse que donne la force accélératrice au point X, d'où il commence à décrire le second. Suivant le théorème I. (*Num.* CXCV.), nous aurons $g : p :: \text{sin.} PCA : \text{sin. tot.}$; $p : g' :: \text{sin. tot.} : \text{sin.} XCA$. Multipliant par ordre ces deux proportions, & divisant par p les deux termes de la première raison du produit, & par *sin. tot.* les deux termes de la seconde, il vient $g : g' :: \text{sin.} PCA : \text{sin.} XCA$, ou $g : g' :: PA : XA$; parce que dans les petits angles les sinus sont sensiblement proportionnels aux arcs qui mesurent ces angles. Donc les vîtesses g, g' sont comme les arcs PA, XA, ou comme la première partie du premier est à la première partie du second. Au commencement des secondes parties, les forces accélératrices ajouteront à g, g' de nouvelles vîtesses qui seront entr'elles comme les restes des arcs à parcourir, & par conséquent

comme une partie du premier arc eſt à une partie du ſecond. Donc les vîteſſes totales dont le poids ſera animé en décrivant les ſecondes parties des deux arcs, ſeront encore proportionnelles à ces parties. On démontreroit la même choſe de toutes les autres parties correſpondantes des deux arcs. Donc le premier *PA* ſera parcouru dans le même tems que le ſecond. Ainſi les demi-oſcillations, & par conſéquent les oſcillations entières, ſeront iſochrones.

CXCVIII.

THÉORÈME III. *Les durées des oſcillations de deux pendules ſimples différents, ſont comme les racines quarrées de leurs longueurs.*

Pour démontrer ce théorème, ſuppoſons d'abord que les deux pendules décrivent deux arcs ſemblables *PA*, *pa* (*Fig.* 96.), & concevons ces arcs diviſés l'un & l'autre en un même nombre infini d'éléments égaux, plus grands dans le plus grand arc, & moindres dans le plus petit. Prenons enſuite deux éléments correſpondants *BD*, *bd*, qui ſeront également inclinés à l'horizon, & prolongeons-les juſqu'aux points *L* & *l* des horizontales *HO*, *ho*, menées par les points *P* & *p*, d'où les poids commencent à deſcendre. Il eſt évident que ces deux éléments ſeront parcourus de la même manière que ſi les poids étoient tombés le long des plans

inclinés LB, lb. De plus, puisque les lignes semblablement tirées dans les figures semblables, sont proportionnelles, nous aurons $LB : lb :: LD : ld :: BD : bd :: PA : pa$. Et puisque les plans également inclinés sont parcourus dans des tems proportionnels aux quarrés de leurs longueurs (*Num.* CLXXXIII.), si nous appelons T' & t' les tems employés à parcourir LD & ld; T'' & t'' les tems employés à parcourir LB & lb, nous aurons $T' : t' :: \sqrt{LD} : \sqrt{ld}$; $T'' : t'' :: \sqrt{LB} : \sqrt{lb}$. Et dans ces proportions les deux secondes raisons étant égales à celle de $\sqrt{PA}$ à $\sqrt{pa}$, nous aurons $T' : t' :: T'' : t'' :: \sqrt{PA} : \sqrt{pa}$; d'où l'on tire $T' - T'' : t' - t'' :: \sqrt{PA} : \sqrt{pa}$. Or $T' - T''$ est le tems employé à parcourir l'élément BD; $t' - t''$ est le tems employé à parcourir l'élément bd. Donc les tems employés à parcourir des éléments correspondants, sont comme les racines quarrées des arcs semblables PA, pa, ou comme les racines quarrées des longueurs CP, cp; qui sont les rayons de ces arcs semblables, & qui par conséquent leurs sont proportionnelles. Or, si tous les éléments correspondants sont parcourus dans des tems proportionnels aux racines quarrées des longueurs des deux pendules, les arcs entiers PA, pa, seront parcourus dans des tems qui seront

lans le même rapport. Donc les durées des demi-ɔſcillations, & par conſéquent les durées des oſcillations entières de deux pendules différents, feront comme les racines quarrées des longueurs de ces pendules. Ainſi en appelant T & t les durées des oſcillations PP', pp', on aura $T : t :: \sqrt{CP} : \sqrt{cp}$.

Maintenant quand le ſecond pendule décriroit un arc xx' qui ne feroit pas ſemblable à l'arc PP' décrit par le premier, on voit par le théorème précédent (*Num.* CXCVII.), que cet arc xx' feroit toujours décrit dans le tems t, comme l'arc pp' : donc en ce cas on pourroit encore dire que le tems employé par le pendule CP à décrire un arc très-petit, eſt au tems employé par le pendule cp à décrire auſſi un arc très-petit, comme la racine quarrée de la longueur du premier pendule eſt à la racine quarrée de la longueur du ſecond.

On peut conclure de ce théorème, que *les longueurs des pendules ſont comme les quarrés des tems qu'ils emploient à faire leurs oſcillations.*

CXCIX.

THÉORÈME IV. *Les nombres des oſcillations que deux pendules ſimples font dans le même tems, ſont réciproquement comme les racines quarrées de leurs longueurs.*

Car moins ces pendules mettent de tems à faire chacune de leurs oſcillations, plus ils en font pen-

dant un tems déterminé, par exemple, pendant une minute. Donc en appelant respectivement N & n les nombres des oscillations que les deux pendules CP, cp font dans le même tems, T & t les durées de ces oscillations, on aura $N : n :: t : T$. Or on vient de voir (*Num.* CXCVIII.), que $t : T :: \sqrt{cp} : \sqrt{CP}$. Donc $N : n :: \sqrt{cp} : \sqrt{CP}$.

Il suit de ce théorème, que *les longueurs de deux pendules sont réciproquement comme les quarrés des nombres d'oscillations qu'ils font dans le même tems.*

C C.

PROBLÈME I. *Déterminer la longueur d'un pendule qui fasse une oscillation par seconde.*

SOLUTION. Prenez un corps qui renferme beaucoup de matière sous un petit volume, par exemple, une balle de plomb, de cuivre, ou d'or. Suspendez-le à un fil de métal très-délié, dont la longueur exactement mesurée soit de trois ou quatre pieds. Faites osciller ce pendule en l'écartant peu de la verticale, & comptez le nombre d'oscillations qu'il fera pendant un tems déterminé & bien constaté, par exemple, pendant une heure. Comme le pendule à secondes doit faire 3600 oscillations dans une heure, puisqu'il y a dans une heure 3600 secondes, on pourra trouver sa longueur en faisant la proportion suivante (*Num.* CXCIX.) : *le quarré du nombre observé d'oscillations est au quarré du*

nombre 3600, comme la longueur cherchée du pendule à secondes est à la longueur du pendule dont on a compté les oscillations. Le premier, le second & le quatrième terme sont connus dans cette proportion. Donc on trouvera le troisième, qui est la longueur cherchée, en divisant le produit des extrêmes par le moyen connu.

C'est ainsi qu'on a trouvé par des expériences faites avec un très-grand soin, que le pendule simple qui fait à Paris une oscillation par seconde, doit avoir 3 pieds 8,57 lignes, ou à très-peu près 881 demi-lignes de longueur.

CCI.

PROBLÈME II. *De ces trois choses, la longueur d'un pendule simple, la durée de chacune de ses oscillations, le nombre des oscillations qu'il fait dans un tems donné, une étant connue, trouver les deux autres.*

SOLUTION. Si l'on exprime en secondes la durée des oscillations, ainsi que le tems que le pendule met à en faire un certain nombre, on résoudra le problème par les proportions suivantes, démontrées (*Num.* CXCVIII & CXCIX.).

Le quarré d'une seconde est au quarré de la durée d'une oscillation dans le pendule proposé, comme la longueur du pendule à secondes est à la longueur du pendule proposé.

La longueur du pendule à secondes est à la longueur du pendule proposé, comme le quarré du nombre d'oscillations que celui-ci fait dans un tems donné, est au quarré du nombre d'oscillations que le premier fait dans le même tems.

Une seconde est à la durée d'une oscillation dans le pendule proposé, comme le nombre d'oscillations que ce pendule fait dans un tems donné, est au nombre d'oscillations que le pendule à secondes fait dans le même tems.

Si l'on connoît la longueur d'un pendule, on trouvera le quarré de la durée, & par conséquent la durée même de ses oscillations, par la première de ces proportions : ensuite le nombre d'oscillations qu'il fait dans un tems donné, se trouvera par la troisième.

Si l'on connoît le nombre d'oscillations que le pendule fait dans un tems donné, on trouvera sa longueur par la seconde proportion, & la durée de chacune de ses oscillations par la troisième.

Enfin, si l'on connoît la durée des oscillations d'un pendule, on trouvera sa longueur en employant la première proportion, & le nombre des oscillations qu'il fait dans un tems donné, en employant la troisième.

CCII.

REMARQUE. Avant de passer aux pendules composés, nous allons exposer & démontrer le prin-

pe général de la communication du mouvement ans les corps qui agissent les uns sur les autres. Voici ce fameux principe dont on est redevable à M. d'Alembert. *De quelque manière que plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, viennent à changer leurs mouvements actuels; si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement; le second doit être tel que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.*

Supposons, par exemple, un nombre quelconque de corps, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* (*Fig.* 97.), qui agissent, comme on voudra, les uns sur les autres; de manière que s'ils étoient libres, ils dussent décrire dans un instant les espaces aa', bb', cc', dd', ee', mais qu'en conséquence de leur action mutuelle ils décrivent réellement les espaces aa'', bb'', cc'', dd'', ee'' : je dis que si l'on décompose les mouvements qui feroient décrire les premiers espaces que nous venons de nommer, en deux, dont les uns feroient décrire aa'', bb'', cc'', dd'', ee'', & dont les autres feroient décrire des espaces aa''', bb''', cc''', dd''', ee'''; ceux-ci seront tels que les corps animés d'eux seuls, se feroient équilibre.

En effet, si les mouvements capables de faire

décrire aa''', bb''', cc''', dd''' ee''', n'étoient pas tels qu'il en résultât l'équilibre dans le systême, ils altéreroient nécessairement les mouvements qui font décrire aa'', bb'', cc'', dd'', ee''; & par conséquent ces derniers n'auroient pas lieu; ce qui est contre la supposition.

CCIII.

PROBLÊME III. *Trouver la longueur d'un pendule simple qui fasse ses oscillations dans le même tems qu'un pendule composé, chargé de tant de poids qu'on voudra.*

SOLUTION. Soit le pendule composé *CP* (*Fig.* 98.) chargé de trois poids *P*, *Q*, *R*, & faisant avec la verticale un angle quelconque *CPA*. Il est évident que les trois poids devant descendre au premier instant par des arcs également inclinés, prendroient tous la même vîtesse, s'ils ne se gênoient pas dans leurs mouvements; & qu'en nommant *V* cette vîtesse, leurs forces ou mouvements seroient *PV*, *QV*, *RV*. Mais dans le pendule composé, les poids étant assujettis à un fil infléxible, il est impossible qu'ils aient une vîtesse égale au premier instant; car ceux qui sont plus près du centre de suspension, doivent évidemment parcourir un plus petit espace; & ceux qui en sont plus éloignés, doivent parcourir de plus grandes lignes. Il faut donc nécessairement que par l'infléxibilité du fil, la vîtesse avec laquelle chaque poids tendoit

à se mouvoir, soit altérée, & qu'au lieu d'être la même dans tous, elle augmente dans les poids inférieurs & diminue dans les supérieurs. Supposons dans le cas présent, qu'en conséquence de l'action mutuelle, le poids P prenne une vîtesse v plus grande que V, & que les poids Q, R, prennent respectivement les vîtesses v', v'' moindres que V. On pourra décomposer la force PV en deux forces diamétralement opposées, savoir Pv suivant Pp', & $Pv - PV$ en sens contraire. De même, on pourra décomposer QV en Qv' & $QV - Qv'$, l'une & l'autre suivant Qq. Enfin la force RV pourra aussi se décomposer en Rv'' & $RV - Rv''$, toutes deux suivant Rr: ce qui donnera six forces, au lieu de celles que les poids auroient eues naturellement. Or de ces six forces, les trois Pv, Qv', Rv'' sont les seules qui doivent avoir lieu: donc, suivant le principe de M. *d'Alembert*, les trois autres $Pv - PV$, $QV - Qv'$, $RV - Rv''$, doivent être telles qu'elles se fassent équilibre; & pour que cela arrive, il faut que le moment de la première soit égal à la somme des moments des deux autres, par rapport au point fixe C. Donc on doit avoir l'équation

$$(Pv - PV) \times CP = (QV - Qv') \times CQ + (RV - Rv'') \times CR$$

Observons à présent que les mobiles devant décrire des arcs semblables Pp', Qq, Rr, en vertu des vîtesses v, v', v'', il faut que ces vîtesses soient comme ces arcs, & par conséquent comme les rayons

On doit remarquer que le point f eſt différent du centre de gravité G, & que la ligne Cf eſt plus grande que CG.

SECTION III.

Du Mouvement des corps ſollicités par des forces centrales.

CCV.

SUPPOSONS un mobile M (*Fig.* 99.), lancé ſuivant une direction quelconque MT, & ſoumis en même tems à l'action d'une force conſtamment dirigée vers un même point O. Il eſt évident que ſi cette force lui donne à chaque inſtant des impulſions infiniment petites, il changera infiniment peu ſa direction dans les points conſécutifs par leſquels il paſſera, & qu'en conſéquence il ſera forcé de décrire une ligne courbe, dont la nature ou l'eſpèce dépendra de la vîteſſe de projection & de la loi ſuivant laquelle agira la force dirigée vers le point O.

CCVI.

ON appelle *centre des forces* ou *centre du mouvement*, le point vers lequel eſt porté le mobile par la force qui lui fait décrire une courbe; & toutes les lignes droites, telles que OM, tirées de ce centre aux différents points de la courbe décrite, ſont nommées *rayons vecteurs*. On entend en général

poids p; & par conſéquent les poids P & p décriront à chaque inſtant des arcs ſemblables en s'approchant de la verticale. Donc ils y arriveront en même tems, & leurs oſcillations ſeront iſochrones, ſi l'on a $v : V :: CP : cp$; ou

$$\frac{V(P+Q+R)\times CG\times CP}{P\times \overline{CP}^2+Q\times \overline{CQ}^2+R\times \overline{CR}^2} : V :: CP : cp;$$

proportion d'où l'on tirera

$$cp=\frac{P\times \overline{CP}^2+Q\times \overline{CQ}^2+R\times \overline{CR}^2}{(P+Q+R)CG}.$$

Ainſi, *pour avoir l'expreſſion de la longueur du pendule ſimple* cp, *qui fait ſes oſcillations dans le même tems que le pendule compoſé, il faut ajouter enſemble tous les produits de chaque corps par le quarré de ſa diſtance au point de ſuſpenſion* C, *& diviſer la ſomme de ces produits par la ſomme de tous les corps, multipliée par la diſtance du centre de gravité du ſyſtème au même point de ſuſpenſion.*

CCIV.

REMARQUE. Si l'on porte la longueur cp ſur CP, de C en f, le point f ſera ce qu'on appelle *le centre d'oſcillation du pendule compoſé.* Ce point peut être regardé comme chargé de tous les poids que la verge CP porte réellement : il fait ſes oſcillations de la même manière & dans le même tems que le pendule ſimple dont Cf ou cp eſt la longueur.

plan, & dont l'une est perpendiculaire à l'autre. Soit, par exemple, la courbe *MAF* (*Fig.* 99.), dans le plan de laquelle on mène les deux lignes *AX*, *AY* dont l'une est perpendiculaire à l'autre, & que des différents points *N*, *M*, *B*, *F*, *&c.* de de la courbe, on abaisse sur *AX* les perpendiculaires *NQ*, *MP*, *BD*, *FG*, *&c.*: ces perpendiculaires qu'on nomme *ordonnées* ou *appliquées*, seront les distances de ces points à la droite *AX*, & les parties *AQ*, *AP*, *AD*, *AG*, *&c.* comprises entre l'intersection *A* & la rencontre des ordonnées, marqueront les distances des mêmes points à la droite *AY*, & seront ce qu'on appelle les *abscisses* de la courbe. On nomme aussi *coordonnées* une abscisse quelconque & l'ordonnée qui lui répond; par exemple, l'abscisse *AP*, & l'ordonnée *PM*. Si l'on a une équation au moyen de laquelle, connoissant l'une des coordonnées, on puisse déterminer l'autre, la nature de la courbe est exprimée par cette équation. Les deux lignes *AX*, *AY*, auxquelles on rapporte les points de la courbe, sont les *axes* de cette courbe. On appelle *axe des abscisses* ou simplement *axe*, la ligne *AX* sur laquelle on abaisse les ordonnées des différents points; & l'on donne le nom *d'axe des ordonnées* à la ligne *AY* qui leur est parallèle.

La *tangente* à un point *M* de la courbe est une droite *MT*, menée de manière qu'il ne soit pas

possible de tirer de ce point, entr'elle & la courbe, aucune autre ligne droite. On appelle *normale* une ligne MH menée perpendiculairement à la courbe jusqu'à la rencontre de l'axe. On appelle *sous-tangente*, la partie PT de l'axe comprise entre les points où il est rencontré par l'ordonnée & la tangente; & l'on entend par *sous-normale*, la partie PH du même axe comprise entre l'ordonnée & la normale. Si l'on conçoit un cercle qui passe par trois points contigus m, M, m' de la courbe; il aura dans ces points la même courbure & la même tangente qu'elle; & son centre sera dans quelque point C de la perpendiculaire menée au point M. Le rayon MC d'un cercle qui se confond ainsi avec la courbe dans trois points consécutifs, est ce qu'on appelle *rayon de courbure* ou *rayon du cercle osculateur* de la courbe en ces points.

Après avoir défini ces différentes lignes, revenons aux forces centrales.

Du Mouvement dans des Trajectoires quelconques.

CCVIII.

THÉORÈME I. *La surface comprise entre un arc quelconque d'une trajectoire & les deux rayons vecteurs tirés du centre des forces aux extrémités de cet arc, est toujours comme le tems employé à parcourir cet arc.*

En effet, un mobile qui pendant un instant vient

de parcourir la ligne PQ (*Fig.* 100.), décriroit dans l'inſtant ſuivant la ligne $QF = PQ$ ſuivant la même direction, s'il n'éprouvoit aucun changement dans ſon mouvement. Mais s'il éprouve au point Q l'action d'une force conſtamment dirigée vers le point central O, & capable de lui faire parcourir pendant l'inſtant dont il s'agit, un petit eſpace QG vers le centre, alors il ſuivra la diagonale du parallélogramme formé ſur la direction des deux puiſſances dont il eſt animé, & il arrivera en p, comme il eſt évident par le principe du mouvement composé. Or les parties triangulaires OPQ, OQp décrites par les rayons vecteurs en des inſtants égaux, ſont égales entr'elles, puiſqu'elles ſont égales l'une & l'autre au triangle OQF; la première, parce que les deux baſes PQ, QF, égales par la ſuppoſition, ſont ſur la même ligne, & que le ſommet des deux triangles eſt au même point O; la ſeconde, parce que OQ eſt une baſe qui lui eſt commune avec le triangle OQF, & que les deux triangles OQp, OQF ſont compris entre les mêmes parallèles OQ, Fp.

On voit par là, que les aires parcourues par les rayons vecteurs en des inſtants égaux, ſont égales entr'elles, & que par conſéquent l'aire totale compriſe entre deux rayons vecteurs quelconques, croît comme le tems employé à la parcourir. Donc ſi l'on prend deux tems tels qu'on voudra, ils ſeront

entr'eux, comme les espaces parcourus par les rayons vecteurs pendant ces tems.

Dans cette démonstration, nous avons supposé les instants égaux: mais la proposition se démontreroit aussi aisément quand on voudroit les supposer inégaux. Que le premier, par exemple, soit au second comme 1 est à m; on aura $PQ : QF :: 1 : m$: donc $OPQ : OQF :: 1 : m$; & parce que OQF vaut toujours OQp, on aura $OPQ : OQp :: 1 : m$; c'est-à-dire, que le premier & le second des espaces triangulaires décrits par les rayons vecteurs, seront comme le premier & le second des instants pendant lesquels il sont décrits.

Cette proposition, qui est la première loi de *Képler*, sera toujours vraie, pourvu qu'il n'y ait qu'un centre des forces, & qu'aucune cause étrangère n'altère le mouvement du mobile dans une direction différente de celle du rayon vecteur.

CCIX.

Corollaire I. Il ne faut pas conclure de cette proposition, que quand deux mobiles décrivent des courbes différentes, les espaces parcourus par les rayons vecteurs dans l'une & dans l'autre, soient entr'eux comme les tems employés à les parcourir. *Si l'on prend deux points quelconques dans les deux courbes dont nous parlons, les espaces décrits par les rayons vecteurs, seront en raison composée*

O 4

des vîtesses qu'ont les mobiles dans ces points, des rayons vecteurs menés à ces points, des sinus des angles que font ces rayons vecteurs avec les courbes, & des tems pendant lesquels on considère les mouvemens.

Soit le mobile M (*Fig.* 101.) qui pendant un instant T parcoure avec une vîtesse g l'arc infiniment petit Mm, qui égalera gT, parce que l'espace parcouru est égal à la vîtesse multipliée par le tems. Soit un autre mobile M', qui dans l'instant T' décrive avec une vîtesse g' l'arc $M'm'$, dont la valeur sera $g'T'$. Des centres des forces O, O', soient menés les rayons vecteurs OM, $O'M'$, que j'appelle respectivement r, r', qui fassent avec les courbes des angles hMm, $h'M'm'$, dont les sinus soient supposés respectivement s, s'. Si l'on tire les autres rayons vecteurs infiniment proches Om, $O'm'$ avec lesquels des points O & O' comme centres, on décrive les arcs mh, $m'h'$ qui tomberont perpendiculairement sur OM & $O'M'$, & que l'on pourra considérer comme des lignes droites, parce qu'ils seront infiniment petits; je dis que l'espace OMm parcouru par des rayons vecteurs dans la première courbe, sera à l'espace $O'M'm'$ parcouru par les rayons vecteurs dans la seconde, comme $grsT$ est à $g'r's'T'$.

En effet, dans le triangle Mmh on a, le sinus de l'angle droit est au côté opposé Mm, comme le

finus de l'angle mMh eſt au côté mh; ou en ſuppoſant le ſinus total $= 1$, on a, $1 : gT :: s : mh = gsT$. On trouve par la même raiſon $m'h' = g's'T'$. Or les ſurfaces des triangles étant comme les produits des baſes par les hauteurs, le triangle OMm eſt au triangle $O'M'm'$, comme $OM \times mh$ eſt à $O'M' \times m'h'$, c'eſt-à-dire, comme $grsT$ eſt à $g'r's'T'$.

Mais ſi au lieu de conſidérer le corps M en mouvement pendant un inſtant, on le conſidère pendant 2, 3, 4, &c. inſtants, le ſecond antécédent $grsT$ de cette proportion deviendra double, triple, quadruple, &c.; & par le théorème précédent (*Num.* CCVIII.), l'eſpace parcouru par les rayons vecteurs, deviendra auſſi double, triple, quadruple, &c. Donc le premier antécédent croiſſant comme le ſecond, la proportion aura toujours lieu. On peut raiſonner de même par rapport au mobile M', & conclure que ſi deux mobiles décrivent des courbes différentes, les eſpaces parcourus par les rayons vecteurs ſont en raiſon compoſée des vîteſſes qu'ont les mobiles dans deux points déterminés de ces courbes, des rayons vecteurs menés à ces points, des ſinus des angles que font ces rayons vecteurs avec les courbes, & des tems pendant leſquels on conſidère les mouvements.

CCX.

COROLLAIRE I. Si l'on appelle E l'eſpace par-

couru par les rayons vecteurs dans la première courbe, & E' l'espace parcouru par les rayons vecteurs dans la seconde, le corollaire précédent sera exprimé par la proportion $E : E' :: grsT : g'r's'T'$; de laquelle ou tire $T : T' :: \frac{E}{grsT} : \frac{E'}{g'r's'T'}$, en divisant les antécédents par grs & les conséquents par $g'r's'$.

CCXI.

THÉORÈME II. *Dans toute trajectoire les espaces parcourus pendant des tems très-petits, en vertu de la force centripète, sont comme les quarrés de ces tems.*

Car la force centripète agissant continuellement, & son action ne variant qu'infiniment peu pendant un tems infiniment petit, on doit la regarder pendant ce tems comme une force accélératrice constante. Donc elle fera parcourir au mobile, des espaces proportionnels aux quarrés des tems.

On peut aussi démontrer cette proposition d'une autre manière, en considérant la trajectoire ZMX parcourue par le mobile M (*Fig.* 102.). Par les trois points consécutifs M, n, m, de cette trajectoire, imaginons le cercle osculateur MVB, dont le diamètre est MB. Du centre des forces O, menons les rayons vecteurs OM, On, Om, & prolongeons ces deux derniers jusqu'à la rencontre de la tangente MT en r & R. Il est évident que nr,

mR, feront les efpaces parcourus en vertu de la force centripète, pendant les tems infiniment petits que le mobile emploie à parcourir les arcs *Mn*, *Mm*. Or en appelant ces tems refpectivement t & T, je dis qu'on aura $nr : mR :: t^2 : T^2$. Car fi des points *n* & *m* on abaiffe fur le diamètre les perpendiculaires *na*, *mb*, & fur la tangente les perpendiculaires *ns*, *mS*, on aura deux triangles *nsr*, *mSR*, rectangles en *s* & *S*, & dont les angles en *r* & *R* feront égaux, puifque les lignes *Or*, *OR* qui paffent par des points contigus *n*, *m*, doivent former avec la tangente des angles dont la différence foit infiniment petite. Donc les côtés *nr*, *mR* font entr'eux comme les perpendiculaires *ns*, *mS*, ou comme les parties *Ma*, *Mb* du diamètre qui font égales à ces perpendiculaires. Or on démontre en Géométrie, que les parties *Ma*, *Mb*, font entr'elles comme les quarrés des cordes qu'on mèneroit de *M* aux points *n* & *m*, & par conféquent comme les quarrés des arcs *Mn*, *Mm*, qui fe confondent ici avec ces cordes. Donc les efpaces *nr*, *mR* font comme les quarrés des arcs *Mn*, *Mm*. De plus, la vîteffe du mobile ne changeant qu'infiniment peu, de *M* en *m*, les arcs *Mn*, *Mm* font comme les tems t & T employés à les parcourir. Donc $\overline{Mn}^2 : \overline{Mm}^2 :: t^2 : T^2$; d'où il fuit que $nr : mR :: t^2 : T^2$.

CCXII.

COROLLAIRE I. *Que le mobile* M (Fig. 103.) *parcourant la trajectoire* ZMX, *ait en* M *une force centripète* F, *dont on considère l'action pendant l'instant* T. *Que le mobile* M' *parcourant la courbe* ZM'X', *ait en* M' *une force centripète* F', *dont on considère aussi l'action pendant un instant* T'. *Les espaces* mR, m'R' *parcourus vers les centres de mouvement* O & O', *en vertu de ces forces centripètes, seront entr'eux en raison composée de ces forces & des quarrés des tems; c'est-à-dire, qu'on aura la proportion* $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$.

En effet, nous venons de voir dans le théorème II, que les espaces mR, $m'R'$, sont, toutes choses d'ailleurs égales, comme les quarrés des tems pendant lesquels on considère l'action des forces centripètes F & F'. Ils sont aussi proportionnels à ces forces : car, en supposant que tout soit d'ailleurs égal, plus une force centripète sera grande, plus elle retirera le mobile vers le point central. Donc les espaces mR, $m'R'$, sont proportionnels & aux forces centripètes & aux quarrés des tems pendant lesquels on considère leur action; ce qui donne $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$, ou $FT^2 : F'T'^2 :: mR : m'R'$.

CCXIII.

COROLLAIRE II. On ne détruira pas cette pro-

portion, en divisant les deux antécédents par T^2, & les deux conséquents par T'^2; ce qui donnera $F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}$.

CCX V.

COROLLAIRE III. On a vu (*Num.* CCX.) que $T : T' :: \frac{E}{grs} : \frac{E'}{g'r's'}$, & dans cette proportion E & E' expriment les espaces parcourus par les rayons vecteurs dans les deux courbes que l'on considère (*Fig.* 103.). Ayant mené des rayons vecteurs aux points contigus M, m, M', m', si l'on abaisse les petits arcs perpendiculaires mh, $m'h'$, on aura $E : E' :: \frac{OM \times mh}{2} : \frac{O'M' \times m'h'}{2}$ $:: OM \times mh : O'M' \times m'h'$; ou en prenant au lieu des triangles OMm, $O'M'm'$, les deux triangles ORM, $O'R'M'$ qui ne diffèrent des premiers que des espaces infiniment plus petits MmR, $M'm'R'$ qu'on doit négliger, on aura $E : E' :: RM \times OP : R'M' \times O'P'$. (Les lignes OP, $O'P'$ sont des lignes que je suppose tirées du centre des forces perpendiculairement sur les tangentes). Donc en mettant au lieu du rapport de E à E' un des précédents qui lui sont égaux, on aura

$$T : T' :: \frac{OM \times mh}{grs} : \frac{O'M' \times m'h'}{g'r's'}$$

$$\& \; T : T' :: \frac{RM \times OP}{grs} : \frac{R'M' \times O'P'}{g'r's'}.$$

$$\text{Donc } T^2 : T'^2 :: \frac{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2}{g^2r^2s^2} : \frac{\overline{O'M'}^2 \times \overline{m'h'}^2}{g'^2r'^2s'^2}$$

$$:: \frac{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2}{g^2r^2s^2} : \frac{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}{g'^2r'^2s'^2}.$$

Que l'on mette à présent dans la proportion du corollaire précédent, au lieu du rapport de T^2 à T'^2, ces deux dernières raisons qui lui sont égales, on aura les deux analogies suivantes,

$$F : F' :: \frac{g^2r^2s^2 \times mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{g'^2r'^2s'^2 \times m'R'}{\overline{O'M'}^2 \times \overline{m'h'}^2};$$

$$F : F' :: \frac{g^2r^2s^2 \times mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{g'^2r'^2s'^2 \times m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}.$$

CCXV.

COROLLAIRE IV. Soit G le point où le rayon vecteur, mené au point m, rencontre le cercle osculateur. On démontre en Géométrie, que la tangente MR est moyenne proportionnelle entre la sécante RG, & sa partie extérieure mR. Donc $mR : RM :: RM : RG$, & par conséquent $mR = \frac{\overline{RM}^2}{RG}$. Au lieu du diviseur RG, on peut mettre mG, qui n'en diffère que de la quantité infiniment petite mR, & le quotient ou la valeur de mR ne chan-

gera pas d'une quantité à laquelle on doive avoir égard. Par la même raison, au lieu de diviser par mG, on peut se servir de MV, parce que des cordes terminées à des points contigus ne diffèrent pas d'une quantité finie. (Le point V est l'intersection du cercle osculateur & du rayon vecteur mené en M). Donc $mR = \frac{\overline{RM}^2}{MV}$. En prenant dans la seconde courbe les points G' & V' où le cercle osculateur est rencontré par les rayons vecteurs tirés aux points m' & M', on trouvera de même $m'R' = \frac{\overline{R'M'}^2}{M'V'}$; & substituant ces valeurs de mR, $m'R'$ dans la dernière proportion du corollaire précédent, elle deviendra

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2}{\overline{O'P'}^2 \times M'V'}.$$

CCXVI.

COROLLAIRE V. Si du point V on mène la corde VB à l'extrémité du diamètre de courbure MB, les deux triangles MVB, MOP seront semblables. Car l'angle MVB appuyé sur le diamètre est droit, ainsi que OPM, & les angles VMB, MOP sont alternes internes. Donc $OM : OP :: MB : MV = \frac{OP \times MB}{OM} = \frac{OP \times 2MC}{OM}$. On

trouvera de même que $M'V' = \frac{O'P' \times 2M'C'}{O'M'}$.

substituant ces valeurs au lieu de MV & de M' dans la proportion du corollaire précédent, on a

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times 2MC} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times 2M'C'}.$$

Ou plus simplement,

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}.$$

CCXVII.

Corollaire VI. Si les rayons vecteurs, q nous avons appelés r, r' sont perpendiculaires l'i & l'autre à la courbe, les sinus s & s' seront égau & l'on pourra les supprimer dans les secondes ra sons des proportions que nous avons trouvées ju qu'à présent. Ces proportions se réduiront ai aux suivantes:

$$E : E' :: grT : g'r'T'.$$

$$T : T' :: \frac{E}{gr} : \frac{E'}{g'r'}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{g'^2 r'^2 \times m'R'}{\overline{O'M'}^2 \times \overline{m'h'}^2}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{g'^2 r'^2 \times m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'P'}^2 \times M'V'}.$$

F:

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} . \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'} .$$

CCXVIII.

Corollaire VII. Comme toutes les proportions des corollaires précédents ont lieu en quelque point que l'on ſuppoſe le centre des forces pour chaque courbe, elles ſubſiſteront également, ſi l'on ſuppoſe que les points O & O' ſoient placés l'un ſur l'autre, de manière que les mobiles qui parcourent les deux trajectoires, aient un centre commun de mouvement.

CCXIX.

Corollaire VIII. Comme les proportions dont il s'agit, ſubſiſtent quelles que ſoient les trajectoires, & quelque poſition qu'on leur donne, elles auront encore lieu, ſi l'on ſuppoſe que les deux trajectoires qui ont le même centre des forces, ſoient égales & placées l'une ſur l'autre, en ſorte qu'elles n'en faſſent qu'une. On peut donc dire que le rapport des forces centripètes de deux mobiles qui décriroient la même trajectoire, ſeroit exprimé par les proportions des numéros CCXIII, CCXIV, CCXV, CCXVI. Comme on peut alors ſuppoſer $r = r'$, $s = s'$, on aura $r^2 s^2 = r'^2 s'^2$; & l'on pourra diviſer les deux termes des ſecondes raiſons par $r^2 s^2$. Si l'on ſuppoſe de plus, que les forces cen-

tripètes des deux mobiles soient égales dans les mêmes points de la courbe, on aura $g = g'$, parce qu'il est évident que si les forces centripètes F & F' étoient les mêmes à l'extrémité du rayon déterminé r, & qu'en même tems les vîtesses g, g' fussent inégales, il ne seroit pas possible que les mobiles décrivissent la même courbe. On voit donc, qu'en supposant $g = g'$, on pourra aussi diviser les termes des secondes raisons par g, ce qui donnera (*Fig.* 104),

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{m'R'}{\overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2},$$

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2};$$

$$F : F' :: \frac{1}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{1}{\overline{OP'}^2 \times M'V'};$$

$$F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C'}.$$

Ces proportions donnent aussi le rapport des forces centripètes d'un seul mobile considéré dans deux points quelconques de la trajectoire qu'il décrit. Car il est évident que ce mobile passant aux deux points M, M' est exactement soumis aux mêmes forces qui solliciteroient deux mobiles mus dans la même trajectoire, & qui seroient l'un en M, l'autre en M', dans la supposition qu'on ait $grs = g'r's'$.

CCXX.

REMARQUE I. On peut auſſi démontrer directement, que les proportions du corollaire précédent expriment le rapport des forces centripètes F, F', auxquelles eſt ſoumis un mobile dans deux points quelconques, M, M' de ſa trajectoire (*Fig.* 104), en s'y prenant de la manière ſuivante.

Ayant pris les arcs infiniment petits Mm, $M'm'$ décrits pendant les inſtants T, T', menons du centre des forces O les rayons vecteurs OM, OM', Om, Om' dont les directions coupent les cercles oſculateurs aux points V, V', G, G'. Des points m & m' abaiſſons ſur OM & OM' les perpendiculaires mh, $m'h'$. Prolongeons Om, Om' juſqu'aux points R, R' des tangentes menées aux points M, M', & tirons ſur ces tangentes les perpendiculaires OP, OP'. Enfin ſoient C & C' les centres des cercles oſculateurs pour les points M & M', MB & $M'B'$ les diamètres de courbure, VB & $V'B'$ les cordes menées des points V & V' aux extrémités de ces diamètres.

1° On aura (*Num.* CCXII.), $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$: d'où l'on tirera

$$F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}.$$

2° Dans la trajectoire dont il s'agit, les eſpaces parcourus par les rayons vecteurs ſont comme les tems employés à les parcourir (*Num.* CCVIII) :

donc $T : T' :: \frac{OM \times mh}{2} : \frac{OM' \times m'h'}{2}$ $:: \frac{RM \times OP}{2} : \frac{R'M' \times OP'}{2}$; d'où l'on tirera $T^2 : T'^2 :: \overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2 : \overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2$ $:: \overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2 : \overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2$. Subſtituant l'une de ces deux dernières raiſons, au lieu de celle de T^2 à T'^2 dans la proportion $F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}$, on aura

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{m'R'}{\overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2},$$

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2};$$

3° Dans la dernière de ces proportions, au lieu de mR & de $m'R'$, on pourra mettre $\frac{\overline{RM}^2}{MV}$, $\frac{\overline{R'M'}^2}{M'V'}$, & l'on aura

$$F : F' :: \frac{1}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{1}{\overline{OP'}^2 \times M'V'};$$

4° Enfin, au lieu de MV & de $M'V'$, on pourra ſubſtituer $\frac{OP \times 2MC}{OM}$, $\frac{OP' \times 2M'C'}{OM'}$, & l'on aura $F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times 2MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times 2M'C'}$ $:: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C'}$.

CCXXI.

Remarque II. Il eſt eſſentiel d'obſerver qu'en comparant juſqu'ici les forces F & F', nous avons déſigné par ces quantités les forces centripètes qui ſollicitent chaque molécule élémentaire des corps M & M', priſe en particulier. Afin d'éviter toute confuſion, on pourra nommer ces forces F & F' *les forces centripètes ſimples* des mobiles, & donner le nom de *force centripète totale* ou *abſolue* à la réſultante des forces centripètes ſimples, qui agiſſent ſur tous les éléments dont un corps eſt composé. Pour déterminer généralement cette réſultante, il faut avoir recours au calcul intégral, quoiqu'on puiſſe la trouver plus ſimplement dans certains cas particuliers. Si, par exemple, on ſuppoſe que les forces centripètes ſimples du mobile M ſoient toutes égales & ſenſiblement parallèles, il eſt évident qu'on aura, à très-peu près, leur réſultante ou la force centripète totale, en répétant F autant de fois qu'il y a de molécules dans la maſſe entière M, c'eſt-à-dire, en multipliant F par M.

On aura de même la force centripète totale du mobile M' en multipliant F' par M'; & le rapport de ces forces centripètes totales, ſera exprimé par la proportion, $F \times M : F' \times M'$ $:: \dfrac{g^2 r^2 \times OM \times M}{\overline{OP}^3 \times MC} : \dfrac{g'^2 r'^2 \times O'M' \times M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}$.

Car la proportion trouvée (*Num.* CCXVI.) subsiste, si l'on multiplie les deux antécédents par M & les deux conséquents par M'.

CCXXII.

THÉORÈME III. *Les vîtesses d'un mobile dans différents points de sa trajectoire, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du centre des forces sur les tangentes des points où l'on suppose ce mobile.*

Pour le démontrer, prenons deux arcs infiniment petits Mm, $M'm'$ dans la trajectoire décrite par le mobile (*Fig.* 105.), & supposons que ces arcs soient parcourus dans le même tems. Ayant mené du centre des forces O des rayons vecteurs aux extrémités de ces arcs, & abaissé les perpendiculaires OP & OP' sur leurs tangentes, nous aurons le triangle OMm égal au triangle $OM'm'$, c'est-à-dire, $\frac{Mm \times OP}{2} = \frac{M'm' \times OP'}{2}$, & nous tirerons de cette égalité $Mm : M'm' :: OP' : OP$. Or les vîtesses du mobile aux points M & M', sont comme les espaces Mm, $M'm'$ parcourus dans le même tems. Donc, en nommant ces vîtesses V & V', nous aurons $V : V' :: OP' : OP$, ou $V : V' :: \frac{1}{OP} : \frac{1}{OP'}$.

CCXXIII.

THÉORÈME IV. *Les vîtesses de deux mobiles*

qui décrivent des trajectoires différentes, sont toujours en raison directe des vîtesses qu'ils ont dans deux points déterminés de ces trajectoires, des rayons vecteurs menés à ces points, des sinus des angles que font ces rayons avec les courbes, & en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur les tangentes des points où l'on suppose les mobiles.

En effet, que les mobiles M & M' (*Fig.* 103.) décrivent pendant le même tems les arcs infiniment petits Mm, $M'm'$ de leurs courbes. Des centres des forces O & O', ayant mené des rayons vecteurs aux extrémités de ces arcs, & abaissé sur les tangentes des mêmes arcs les perpendiculaires OP & $O'P'$, nous aurons (*Num.* CCIX.) $OMm : O'M'm' :: grsT : g'r's'T' :: grs : g'r's'$, parce qu'on suppose $T = T'$. Or les triangles OMm, $O'M'm'$ sont comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Donc $Mm \times OP : M'm' \times O'P' :: grs : g'r's'$; ou divisant les deux antécédents par OP & les deux conséquents par $O'P'$, $Mm : M'm' :: \frac{grs}{OP} : \frac{g'r's'}{O'P'}$. Au lieu du rapport de Mm à $M'm'$ on peut mettre celui des vîtesses qui lui est égal. Donc en appelant respectivement V & V' ces vîtesses, nous aurons la proportion qu'il falloit démontrer, $V : V' :: \frac{grs}{OP} : \frac{g'r's'}{O'P'}$.

Si $s = s'$, il eſt évident qu'on aura $V : V' :: \frac{gr}{OP} : \frac{g'r'}{O'P'}$.

Du Mouvement dans les Sections coniques.

Les courbes que l'on déſigne par le nom de *Sections coniques*, ſont *la parabole*, *l'ellipſe* & *l'hyperbole*. On les appelle Sections coniques, parce que ce ſont les courbes que l'on peut former ſur la ſurface d'un cône en le coupant par des plans.

La parabole eſt une courbe *ZAN* (*Fig.* 106.) dont chaque point *M* eſt également éloigné d'un point fixe *O* qu'on appelle *foyer*, & d'une ligne droite *LG* auſſi fixe, qu'on appelle la *directrice*. La ligne *AX* qui paſſe par le foyer, & qui prolongée tomberoit perpendiculairement ſur la directrice, eſt l'axe de la parabole.

L'ellipſe (*Fig.* 107.) eſt une courbe telle que la ſomme des deux diſtances *MO*, *Mo*, de chacun de ſes points à deux points fixes *O*, *o* qu'on appelle *foyers*, eſt toujours égale à une même ligne. La droite *AB* qui paſſe par les deux foyers, & qui aboutit à deux points oppoſés de la courbe, eſt le *grand axe* ou *l'axe principal*. Le point *X* pris dans cette ligne à égale diſtance des deux foyers, eſt le centre de l'ellipſe. Le *petit axe* eſt une droite *DE* tirée par le centre perpendiculairement au

grand axe, & prolongée jusqu'aux points opposés de l'ellipse.

L'hyperbole (*Fig* 108.) est une courbe *ZAN*, telle que la différence des lignes *Mo*, *MO* tirées de chacun de ses points *M* aux points fixes *o* & *O*, qu'on appelle aussi *foyers*, soit toujours égale à la même ligne *AB*, qu'on nomme le *grand axe.* La ligne *AX* qui passe par l'un des foyers *O*, & qui prolongée passeroit par l'autre *o*, est ce que nous appellerons l'*axe de l'hyperbole.*

Dans toute Section conique, on appelle *paramètre* la droite *NS* menée par le foyer perpendiculairement à l'axe, & prolongée de part & d'autre jusqu'à la rencontre de la courbe.

On voit par la définition de l'ellipse, & par celle que nous venons de donner du paramètre, que si les foyers *O* & *o* (*Fig.* 107.) se rapprochoient de plus en plus jusqu'à se confondre en un seul point, l'ellipse deviendroit un cercle; de manière que le cercle n'est dans le fond qu'une ellipse dont les foyers tombent l'un sur l'autre, & dans laquelle le paramètre se confond avec le diamètre.

Le point *A* où l'axe rencontre la parabole & l'hyperbole (*Fig.* 106 & 108.), s'appelle *l'origine* ou *le sommet* de la courbe. Dans l'ellipse, nous supposerons aussi l'origine à l'une des extrémités du grand axe. Quand un mobile décrit une ellipse, & que le centre des forces est placé à l'un des foyers *O*,

on donne le nom d'*apside inférieure*, à l'extrémité *A* de l'axe, qui est la plus proche de ce foyer; & l'on appelle *apside supérieure*, l'autre extrémité *B* de cet axe, qui est la plus éloignée du même foyer. Enfin on dit que le mobile est à sa plus petite, ou à sa plus grande, ou à sa moyenne distance, suivant qu'il se trouve à l'apside inférieure, ou à l'apside supérieure, ou à l'une des extrémités du petit axe.

Quand il s'agit du mouvement des Planètes & des Comètes, qui décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers, l'apside supérieure s'appelle aussi l'*aphélie*, & l'apside inférieure le *périhélie*.

CCXXV.

POUR comprendre la théorie que nous allons exposer, on peut partir des propositions suivantes, comme d'autant de vérités démontrées dans les ouvrages de Géométrie, où l'on traite des Sections coniques.

1° *Dans l'ellipse, les rayons vecteurs croissent continuellement dès l'apside inférieure* A (Fig. 107.) *jusqu'à l'apside supérieure* B. *De même ces rayons croissent de plus en plus dans la parabole & dans l'hyperbole* (Fig. 106 & 108.), *à mesure que l'arc* AM *décrit par le mobile, devient plus grand.*

2° *Dans les trois sections coniques, l'axe est perpendiculaire à l'origine de la courbe.*

3° *Dans toute section conique, si du point* H *où la normale rencontre l'axe, on abaisse une perpendiculaire* HR *sur le rayon vecteur* OM, *le segment* MR *est toujours égal au demi-paramètre.*

4° *Le rayon de courbure dans un point quelconque d'une section conique, est toujours égal à quatre fois le cube de la normale divisé par le quarré du paramètre.*

5° *Le foyer & trois points d'une section conique étant donnés, sa position est déterminée.*

6° *Dans la parabole, la distance du foyer à l'origine* A *est égale au quart du paramètre: dans l'ellipse, cette distance vaut plus que le quart, & dans l'hyperbole, moins que le quart du paramètre.*

7° *Dans l'ellipse, la somme des distances d'un point quelconque* M *aux deux foyers, est égale au grand axe: d'où il suit que la distance du foyer à l'une des extrémités du petit axe, est toujours égale à la moitié du grand axe.*

8° *Dans une ellipse, les tangentes menées par les extrémités du petit axe, sont parallèles à l'axe principal.*

9° *Dans l'ellipse, le paramètre est une troisième proportionnelle au grand & au petit axe: ainsi il est égal au quarré du petit axe, divisé par l'axe principal.*

10° *Si l'on compare les surfaces de deux ellipses,*

on aura toujours cette proportion : La surface de la première est à la surface de la seconde, comme le produit des deux axes de la première est au produit des deux axes de la seconde.

11° *En nommant* p *le paramètre d'une section conique*, x *une abcisse quelconque comptée dès l'origine de la courbe*, y *l'ordonnée correspondante*, 2a *le grand axe, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole ; la nature de la parabole sera exprimée par l'équation* $y^2 = px$, *celle de l'ellipse par l'équation* $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, *& celle de l'hyperbole par* $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$.

12° *Les mêmes lignes étant désignées par les mêmes lettres, la sous-normale vaudra* $\frac{1}{2}p$ *dans la parabole*, $\frac{1}{2}p - \frac{px}{2a}$ *dans l'ellipse, &* $\frac{1}{2}p + \frac{px}{2a}$ *dans l'hyperbole. Ainsi dans la parabole, elle sera égale au demi-paramètre, dans l'ellipse elle sera moindre, & dans l'hyperbole plus grande que le demi-paramètre.*

CCXXVI.

THÉORÈME I. *Si un mobile décrit une section conique, dans laquelle on suppose que le foyer soit le centre du mouvement, les forces centripètes dans les différents points de la courbe, seront en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs.*

En effet, soit une section conique MAM' (*Fig.* 109.) dont le foyer soit O. Menons les rayons vecteurs OM, OM' à deux points quelconques où l'on suppose les mobiles; & abaissons les perpendiculaires OP, OP' sur les tangentes tirées à ces points. Soient MC, $M'C'$ les rayons de courbure; MH, $M'H'$ les normales; HR, $H'R'$ les perpendiculaires menées des points H & H' sur les rayons vecteurs. En nommant p le paramètre, nous aurons $\frac{1}{2}p = MR = M'R'$, $MC = \frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$, $M'C' = \frac{4\overline{M'H'}^3}{p^2}$.

Cela posé, les triangles OMP, MHR sont semblables, parce qu'ils ont des angles droits en P & en R, & que de plus les angles POM, OMH sont alternes internes. Donc $OM : MH :: OP : MR = \frac{1}{2}p$; d'où l'on tire $OP = \frac{OM \times p}{2MH}$, & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{OM}^3 \times p^3}{8\overline{MH}^3}$. On trouve de même $\overline{OP'}^3 = \frac{\overline{OM'}^3 \times p^3}{8\overline{M'H'}^3}$. Or nous avons vu (*Num.* CCXX.), que le rapport des forces centripètes F & F' qui sollicitent le mobile en deux points M & M' d'une même courbe, est exprimé par la proportion

$F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C'}$, dans la quelle nous pouvons substituer les valeurs de $\overline{OP}^3$ & de $\overline{OP'}^3$ que nous venons de trouver, & nous aurons

$$F : F' :: \frac{OM \times 8\overline{MH}^3}{\overline{OM}^3 \times MC \times p^3} : \frac{OM' \times 8\overline{M'H'}^3}{\overline{OM'}^3 \times M'C' \times p^3}$$

ou $F : F' :: \frac{\overline{MH}^3}{\overline{OM}^2 \times MC} : \frac{\overline{M'H'}^3}{\overline{OM'}^2 \times M'C'}$. Substituant encore dans celle-ci $\frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$ au lieu de MC, & $\frac{4\overline{M'H'}^3}{p^2}$ au lieu de $M'C'$, elle deviendra

$$F : F' :: \frac{\overline{MH}^3 \times p^2}{\overline{OM}^2 \times 4\overline{MH}^3} : \frac{\overline{M'H'}^3 \times p^2}{\overline{OM'}^2 \times 4\overline{M'H'}^3},$$ d'où l'on tire $F : F' :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{OM'}^2}$. Or les fractions $\frac{1}{\overline{OM}^2}$, $\frac{1}{\overline{OM'}^2}$, qui ont le même numérateur, sont en raison inverse de leurs dénominateurs; donc les forces F & F' qui sont proportionnelles à ces fractions, sont aussi en raison inverse de leurs dénominateurs $\overline{OM}^2$, $\overline{OM'}^2$; c'est-à-dire, que ces

forces sont en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs.

CCXXVII.

THÉORÈME II. *Réciproquement, si les forces centripètes sont en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs, la courbe décrite par le mobile sera une section conique.*

Pour le démontrer, supposons que le point O (*Fig.* 110.) soit le centre des forces, & concevons la courbe que le mobile décrira, comme divisée en une infinité d'éléments parcourus dans des tems égaux & infiniment petits. Prenons deux de ces éléments IL, LM qui soient contigus, & par les trois points I, L, M, faisons passer une section conique MAM' dont le foyer soit O: je dis qu'elle sera nécessairement la courbe décrite.

En effet, soit prolongé l'élément LM jusqu'en t, de manière qu'on ait $Mt = LM$. Que F soit la force centripète en L, & F' la force centripète en M. Dans le cas où le mobile décriroit la section conique MAM', le troisième élément Mm seroit décrit en vertu d'une force de projection représentée par Mt, & de la force centripète F'. Or, quelle que puisse être la nature de la courbe que le mobile décrira, il est visible que le troisième élément sera pareillement décrit en vertu des mêmes forces Mt & F', pourvu que les forces centripètes

ſoient en raiſon inverſe des quarrés des rayons vecteurs. Donc ce troiſième élément ne pourra être autre choſe que l'élément de la ſection conique. On démontrera de même, que tous les éléments ſuivants de la courbe décrite par le mobile, doivent ſe confondre avec ceux de la ſection conique MAM'. Donc il décrira cette ſection conique, ſi les forces centripètes ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

J'ai dit que la force centripète F' au point M étoit la même dans le cas où l'on ſuppoſe que le mobile décrive une ſection conique, & dans celui où l'on ſuppoſe ſeulement que les forces centripètes ſoient en raiſon inverſe des quarrés des rayons vecteurs. Cela eſt évident, puiſque dans l'un & l'autre cas on a $F : F' :: \frac{1}{\overline{OL}^2} : \frac{1}{\overline{OM}^2}$; proportion dont le premier, le troiſième & le quatrième terme ſont les mêmes, ſoit que le mobile décrive une ſection conique, ſoit qu'on ſuppoſe ſeulement les forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des rayons vecteurs. Donc F' ſera la même force dans l'un & l'autre cas.

CCXXVIII.

THÉORÈME III. *Quand deux mobiles parcourent des ſections coniques différentes, dont ils ont les foyers pour centres de mouvement, les forces centripètes*

centripètes qui les portent vers ces foyers, sont en raison directe des quarrés des rayons vecteurs menés aux sommets des courbes, des quarrés des vîtesses qu'ont les mobiles en passant par ces sommets, & en raison inverse des paramètres multipliés par les quarrés des rayons vecteurs menés aux points où l'on considère les deux mobiles.

Pour démontrer cette proposition, soient MAZ, $M'A'Z'$ (*Fig.* 111.) les deux sections coniques décrites par les mobiles; O & O' leurs foyers; p & p' leurs paramètres; OM & $O'M'$ des rayons vecteurs menés aux deux points quelconques M & M', où l'on suppose les mobiles; OP & $O'P'$ des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes de ces points; MH & $M'H'$ les normales; MC & $M'C'$ les rayons de courbure pour les mêmes points. Nous aurons $MC = \frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$, $M'C' = \frac{4\overline{M'H'}^3}{p'^2}$, & menant des points H & H' les perpendiculaires HR & $H'R'$ sur les rayons vecteurs, les deux segments MR & $M'R'$ vaudront $\frac{1}{2}p$ & $\frac{1}{2}p'$. Cela posé, on démontrera, comme dans le théorème I. (*Num.* CCXXVI.), que l'on a $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{OM}^3 \times p^3}{8\overline{MH}^3}$, $\overline{O'P'}^3 = \frac{\overline{O'M'}^3 \times p'^3}{8\overline{M'H'}^3}$.

Ensuite on employera la proportion démontrée (*Num.* CCXVII.),

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'},$$

dans laquelle on voit que r & r' peuvent exprimer les rayons vecteurs menés aux sommets des courbes, g & g' désignant les vîtesses des mobiles passant par ces sommets. Si l'on substitue dans cette proportion les valeurs des quantités MC, $M'C'$, $\overline{OP}^3$, $\overline{O'P'}^3$, au lieu de ces quantités, on trouvera $F : F'$

$$:: \frac{8g^2 r^2 \times OM \times \overline{MH}^3 \times p^2}{4\overline{OM}^3 \times \overline{MH}^3 \times p^3} : \frac{8g'^2 r'^2 \times O'M' \times \overline{M'H'}^3 \times p'^2}{4\overline{O'M'}^3 \times \overline{M'H'}^3 \times p'^3}.$$

Enfin effectuant les divisions indiquées, autant qu'il est possible de les effectuer, & divisant par 2 les termes de la seconde raison, on aura

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}.$$

Or les fractions sont en raison directe des numérateurs & en raison inverse des dénominateurs: donc les forces centripètes F & F' ont entr'elles le rapport énoncé dans le théorème.

CCXXIX.

CoROLLAIRE I. *Si les forces centripètes* F & F' *qui portent les mobiles vers les foyers* O & O' (Fig. 111.), *sont en raison inverse des quarrés des*

rayons vecteurs OM, O'M', *les produits des rayons vecteurs menés aux sommets des sections coniques par les vîtesses qu'ont les mobiles en passant par ces sommets, sont entr'eux comme les racines quarrées des paramètres; c'est-à-dire, qu'on aura* $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

En effet, si les forces centripètes des deux mobiles sont en raison inverse des quarrés de leurs rayons vecteurs, on aura $F : F' :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2}$. Or par le théorème que nous venons de démontrer, on a toujours $F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$; donc les deux secondes raisons de ces proportions étant égales à celle de F à F', on doit avoir $\frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2} :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$; proportion qui, en multipliant les deux antécédents par $\overline{OM}^2$ & les deux conséquents par $\overline{O'M'}^2$, deviendra $1 : 1 :: \frac{g^2 r^2}{p} : \frac{g'^2 r'^2}{p'}$; & ici les deux termes de la première raison étant égaux, il faut que les deux termes de la seconde le soient pareillement, & que l'on ait $\frac{g^2 r^2}{p} = \frac{g'^2 r'^2}{p'}$, d'où l'on tire $g^2 r^2 : g'^2 r'^2 :: p : p'$; donc $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

CCXXX.

COROLLAIRE II. *En ſuppoſant toujours que les forces centripètes des deux mobiles ſoient en raiſon inverſe des quarrés de leurs rayons vecteurs, les eſpaces parcourus par ces rayons vecteurs dans le même tems, ſeront entr'eux comme les racines quarrées des paramètres.*

Car en appelant E l'eſpace parcouru par les rayons vecteurs dans la première ſection conique, & E' l'eſpace parcouru par les rayons vecteurs dans la ſeconde, on aura (*Num.* CCX.), $E : E' :: grsT : g'r's'T'$; & comme ici $T = T'$ & $s = s'$, on pourra diviſer les deux termes de la ſeconde raiſon par ces quantités; ce qui donnera $E : E' :: gr : g'r'$. Or par le corollaire précédent $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$; donc $E : E' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

CCXXXI.

COROLLAIRE III. *Si les ſections coniques décrites par les mobiles ſont des ellipſes, & que les forces centripètes de ces mobiles ſoient encore en raiſon inverſe des quarrés de leurs rayons vecteurs, les tems des révolutions périodiques ſeront entr'eux comme les ſurfaces des ellipſes diviſées par les racines quarrées des paramètres.*

Soient, par exemple, les mobiles M & M' (*Fig.* 112.) qui parcourent les ellipſes MAB, $M'A'B'$. Que le paramètre de la première ſoit p

& sa surface S; que le paramètre de la seconde soit p' & sa surface S'. Soit T le tems que M emploie à faire sa révolution; T' celui que M' emploie à faire la sienne: je dis que $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$.

En effet, nommons E l'espace que parcourent les rayons vecteurs du mobile M pendant un tems quelconque x, & E' l'espace parcouru par les rayons vecteurs du mobile M' pendant le même tems. Par la première loi de *Képler* (*Num.* CCVIII.), nous aurons les deux proportions suivantes,

$$T : x :: S : E,$$
$$x : T' :: E' : S'.$$

Je les multiplie l'une par l'autre, & j'ai $Tx : T'x :: SE' : S'E$. Je divise les deux termes de la première raison par x, & les deux termes de la seconde par $E \times E'$, ce qui donne $T : T' :: \frac{S}{E} : \frac{S'}{E'}$. Or par le corollaire précédent $E : E' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$. Donc en mettant le rapport de $\sqrt{p}$ à $\sqrt{p'}$, au lieu de celui de E à E' qui lui est égal, (ce qu'on peut faire sans détruire la proportion), on aura $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$.

CCXXXII.

COROLLAIRE IV. *Les mobiles décrivant leurs ellipses suivant les mêmes conditions que dans le*

corollaire précédent, les quarrés des tems périodiques sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses, & par conséquent les mobiles se meuvent suivant la seconde loi de Képler.

Car soient AB & $A'B'$ (*Fig.* 112) les grands axes des ellipses décrites par les mobiles M & M'. Soient CD & $C'D'$ les petits axes des mêmes ellipses. Que S & S' signifient leurs surfaces, comme dans la proportion $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$, que nous venons de trouver (*Num.* CCXXXI.). Au lieu du rapport de S à S', on pourra mettre celui de $AB \times CD$ à $A'B' \times C'D'$, qui lui est égal, parce que les surfaces des ellipses sont entr'elles comme les produits de leurs axes. Donc on aura $T : T' :: \frac{AB \times CD}{\sqrt{p}} : \frac{A'B' \times C'D'}{\sqrt{p'}}$; & en élevant tous les termes au quarré, $T^2 : T'^2 :: \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2}{p} : \frac{\overline{A'B'}^2 \times \overline{C'D'}^2}{p'}$. Il ne faut plus à présent que mettre au lieu de p sa valeur $\frac{\overline{CD}^2}{AB}$, & au lieu de p' sa valeur $\frac{\overline{C'D'}^2}{A'B'}$, & l'on aura enfin $T^2 : T'^2 :: \overline{AB}^3 : \overline{A'B'}^3$; c'est-à-dire, le quarré du tems périodique du mobile M est au quarré du tems périodique du mobile M', comme le cube du grand

axe de l'ellipſe parcourue par le premier, eſt au cube du grand axe de l'ellipſe parcourue par le ſecond.

CCXXXIII.

COROLLAIRE V. *Réciproquement, ſi deux mobiles font leurs révolutions dans deux ellipſes, de manière que les quarrés des tems périodiques ſoient proportionnels aux cubes des grands axes; les forces centripètes qui les portent vers les foyers, ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances à ces foyers, ou des quarrés des rayons vecteurs.*

Pour le démontrer, ſoient AB & $A'B'$ (*Fig.* 112.) les grands axes des ellipſes parcourues, CD & $C'D'$ les petits axes, O & O' les foyers, p & p' les paramètres, S & S' les ſurfaces des ellipſes, E & E' les eſpaces décrits par les rayons vecteurs dans le même tems x, F & F' les forces centripètes des mobiles M & M', enfin T & T' les tems périodiques. On aura les proportions ſuivantes:

1ere $T^2 : T'^2 :: \overline{AB}^2 \times AB : \overline{A'B'}^2 \times A'B'$.

2e $T^2 : T'^2 :: \dfrac{\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2}{p} : \dfrac{\overline{A'B'}^2 \times \overline{C'D'}^2}{p'}$,

3e $T : T' :: \dfrac{AB \times CD}{\sqrt{p}} : \dfrac{A'B' \times C'D'}{\sqrt{p'}}$,

4e $T : T' :: \dfrac{S}{\sqrt{p}} : \dfrac{S'}{\sqrt{p'}}$,

5e $T : x :: S : E$, d'où l'on tire $T = \dfrac{Sx}{E}$,

6° $T' : x :: S' : E'$, d'où l'on tire $T' = \frac{S'x}{E'}$;

7° $T : T' :: \frac{Sx}{E} : \frac{S'x}{E'} :: \frac{S}{E} : \frac{S'}{E'}$,

8° $T : T' :: \frac{S}{gr} : \frac{S'}{g'r'}$,

9° $\frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}} :: \frac{S}{gr} : \frac{S'}{g'r'}$,

10° $\frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{p'}} :: \frac{1}{gr} : \frac{1}{g'r'}$,

11° $\frac{1}{p} : \frac{1}{p'} :: \frac{1}{g^2r^2} : \frac{1}{g'^2r'^2}$,

12° $1 : 1 :: \frac{p}{g^2r^2} : \frac{p'}{g'^2r'^2}$

13° $F : F' :: \frac{g^2\, r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2\, r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$

14° $F : F' :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2}$

On a la première proportion, par l'hypothèſe.

On a la ſeconde, parce que le grand axe étant au petit comme celui-ci eſt au paramètre, le grand axe eſt égal au quarré du petit diviſé par le paramètre.

On a la troiſième, parce que ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, leurs racines quarrées le ſont auſſi.

On a la quatrième, parce que les ſurfaces des ellipſes ſont entr'elles, comme les produits des

rands axes multipliés par les petits. On peut donc ubstituer le rapport des surfaces à celui des pro-luits des axes.

On a la cinquième, parce que suivant la première oi de Képler, le tems périodique *T* est au tems :, comme la surface totale *S* parcourue par les ayons vecteurs dans le tems *T*, est à la surface *E* arcourue par les mêmes rayons vecteurs dans le ems x.

On a la sixième, par la même raison.

On a la septième, parce que les deux antécédents ont égaux par la cinquième, & que les conséquents e sont par la sixième.

On a la huitième, parce que les espaces *E* & *E'* lécrits dans le même tems x par les rayons vec-eurs, sont proportionnels aux quantités gr & $g'r'$, omme on l'a démontré (*Num.* CCX & CCXXX.). On peut donc substituer le rapport de ces quan-ités gr & $g'r'$, au lieu de celui des quantités *E* & *E'*.

On a la neuvième, parce que ses deux raisons sont égales à celles de *T* à *T'*, & par conséquent égales entr'elles.

On a la dixième, parce que l'on peut diviser les deux antécédents de la neuvième par *S*, & les deux conséquents par *S'*, sans détruire la proportion.

On a l'onzième, parce que les quarrés des quan-tités proportionnelles sont en proportion.

On a la douzième, parce que si l'on multiplie les antécédents de la onzième par p, & les conséquents par p', on ne détruira pas la proportion.

La treizième a été démontrée (*Num.* CCXXVIII).

Enfin on a la quatorzième, parce que le produit de la douzième par la treizième doit donner une proportion.

CCXXXIV.

Remarque I. Le théorème III & les corollaires que nous en avons déduits jusqu'à présent, sont vrais, quelle que soit la position des foyers O & O' des sections coniques parcourues par les mobiles. Donc ils sont vrais dans le cas où ces foyers coïncideroient en un seul & même point, comme dans la figure 113. Suivant les observations astronomiques, les planètes principales & les comètes décrivent dans le ciel des ellipses dont le Soleil occupe sensiblement le foyer; & les quarrés de leurs tems périodiques sont proportionnels aux cubes des grands axes de ces ellipses. Donc les forces centripètes qui les portent vers le Soleil, ou, comme s'expriment les Newtoniens, les attractions que le Soleil exerce sur elles, sont en raison inverse des quarrés des distances. Les petites inégalités que l'on remarque dans les mouvements de ces astres, s'expliquent dans l'Astronomie, en supposant qu'ils ne sont pas uniquement portés vers le Soleil, mais

qu'ils s'attirent aussi les uns les autres, & que leurs attractions mutuelles sont en raison inverse des quarrés des distances, & en raison directe des masses attirantes. On explique de même les inégalités beaucoup plus sensibles des planètes secondaires, en supposant qu'elles sont attirées suivant la même loi, par leur planète principale & par les autres corps célestes.

CCXXXV.

Remarque II. Le cercle n'étant qu'une ellipse dont les foyers se confondent, on peut appliquer au mouvement circulaire tout ce que nous avons démontré du mouvement dans l'ellipse. On peut conclure en particulier, que si deux mobiles sollicités par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances, décrivent des cercles différents, les quarrés des tems périodiques seront comme les cubes des diamètres, ou comme les cubes des rayons, puisque les rayons sont proportionnels aux diamètres; & réciproquement, que si deux mobiles mus circulairement emploient à faire leurs révolutions, des tems dont les quarrés soient proportionnels aux cubes des diamètres, les forces centripètes seront en raison inverse des quarrés des distances ou rayons des cercles parcourus. Mais il est à propos de développer ici davantage les loix du mouvement circulaire.

1° *Tout corps tendant à se mouvoir en ligne*

droite, il est évident qu'un mobile mu circula rement, suivroit la tangente, s'il n'étoit retiré ve le centre par la force qui lui fait décrire la circon férence. L'effort que fait un mobile mu circula rement pour s'écarter de la circonférence en suivai la tangente, est ce qu'on entend par *force centri fuge.*

2° *Dans le mouvement circulaire, la force cen tripète est constamment égale à la force centrifug* puisque si la force centrifuge l'emportoit sur la for centripète, le mobile s'éloigneroit du centre; qu'au contraire il s'en approcheroit, si la for centrifuge étoit moindre que la force centripèt

3° *Supposant toujours la force centripète dirig au centre du cercle, la vîtesse d'un corps mu ci culairement est la même dans tous les points la circonférence.* Car la force centripète étant cor tamment perpendiculaire à la vîtesse de projectio ne doit ni l'augmenter, ni la diminuer.

4° *Quelles que soient les circonférences décri par deux mobiles* M *&* M', *les forces centripè simples sont comme les quarrés des vîtesses divi par les rayons.*

Car quelles que soient les courbes décrites, a toujours la proportion,

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}.$$

(*Fig.* 103.). Or, quand les courbes décrites ſont des circonférences de cercles, le rayon $r = OM = OP = MC$, & le rayon $r' = O'M' = O'P' = M'C'$; ainſi la proportion générale devient $F : F' :: \frac{g^2 r^3}{r^4} : \frac{g'^2 r'^3}{r'^4} :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$. Donc puiſque g & g' marquent les vîteſſes de projection, les forces centripètes ſimples des deux mobiles, ſont comme les quarrés des vîteſſes de projection diviſés par les rayons des circonférences décrites.

Pour avoir les forces centripètes abſolues, il faut multiplier chaque force centripète ſimple par la maſſe correſpondante (*Num.* CCXXI.), & l'on aura $F \times M : F' \times M' :: \frac{Mg^2}{r} : \frac{M'g'^2}{r'}$. Donc *les forces centripètes abſolues de deux mobiles mus circulairement, ſont en raiſon directe des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, & en raiſon inverſe des rayons.* Ce que nous diſons des forces centripètes doit s'entendre auſſi des forces centrifuges, qui leur ſont égales.

5° *Les forces centripètes ou centrifuges ſimples de deux mobiles mus circulairement, ſont comme les rayons diviſés par les quarrés des tems périodiques.*

Car ſoient C & C' les circonférences décrites, T & T' les tems employés à les décrire. Puiſque les vîteſſes g & g' ſont uniformes, elles ſont égales

aux espaces parcourus divisés par les tems: on aura donc $g = \frac{C}{T}$ & $g' = \frac{C'}{T'}$. Substituant ces valeurs dans la proportion $F : F' :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$, elle deviendra $F : F' :: \frac{C^2}{T^2 r} : \frac{C'^2}{T'^2 r'}$. Or les circonférences C & C' sont comme leurs rayons r & r'. On peut donc substituer le rapport de ces rayons à celui des circonférences, & l'on aura

$$F : F' :: \frac{r^2}{T^2 r} : \frac{r'^2}{T'^2 r'} :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}.$$

Si l'on multiplie les deux antécédents de cette proportion par M, & les deux conséquents par M', on trouvera $F \times M : F' \times M' :: \frac{Mr}{T^2} : \frac{M'r'}{T'^2}$. Donc *les forces centripètes ou centrifuges absolues sont en raison directe des masses multipliées par les rayons, & en raison inverse des quarrés des tems périodiques.*

A présent, pour trouver la valeur de la force centripète ou centrifuge dans le cercle, on peut faire usage du théorème suivant.

CCXXXVI.

THÉORÈME IV. *Pour qu'un mobile* M (Fig. 114.) *décrive la circonférence d'un cercle, il faut qu'il soit lancé perpendiculairement au rayon, & que la force centripète soit à la gravité, comme*

la hauteur due à la vîtesse de projection est au demi-rayon du cercle.

En effet, soit *M* le diamètre & *C* le centre du cercle.

1° La force centripète qui fait décrire une courbe, n'écarte à chaque instant le mobile qu'infiniment peu de sa direction : donc si le mobile étoit lancé obliquement au rayon, la force centripète, au premier instant, ne l'écarteroit qu'infiniment peu de la direction oblique ; & par conséquent il ne pourroit pas se mouvoir dans la circonférence, qui au point *M* est perpendiculaire au rayon.

2° Le mobile lancé perpendiculairement au rayon, s'éloigneroit de la circonférence en suivant la tangente *MB*, s'il n'étoit retiré vers le centre par l'action de la force centripète. Le mobile décrit donc la circonférence, parce qu'il est animé de deux forces, l'une de projection capable de lui faire parcourir dans un instant la ligne *MB* suivant la tangente, & de l'éloigner du centre d'une quantité *Bb*; l'autre centripète, capable de lui faire parcourir dans le même instant le petit espace *MD* $=Bb$. Ces deux forces lui font décrire la diagonale *Mb* du parallélogramme *MBbD*, de manière qu'à la fin du premier instant, il se trouve à la même distance du centre, qu'au commencement.

3° Par la propriété du cercle, on a $DE : Db :: Db : DM$, ou $ME : MB :: MB : DM$;

parce qu'ici la différence des lignes DE, ME, ainsi que des lignes Db, MB, est une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à ces lignes. Donc $\overline{MB}^2 = ME \times DM = 2CM \times DM$.

4° Appelons g la vîtesse de projection suivant la tangente, & t l'instant que le mobile employeroit à parcourir MB : nous aurons $MB = gt$, & $\overline{MB}^2 = g^2t^2$; donc $2CM \times DM = g^2t^2$.

5° Appelons g' la vîtesse que la force centripète produiroit dans le mobile, en agissant sur lui pendant une seconde : l'espace DM parcouru en vertu de cette force pendant l'instant t, sera $\frac{g't^2}{2}$, comme nous l'avons démontré (*Num.* CLXIII.). Donc $\frac{2CM \times g't^2}{2} = g^2t^2$, & par conséquent $CM \times g' = g^2$.

6° Nommons h la hauteur due à la vîtesse de projection g, & p la vîtesse que la gravité fait acquérir pendant une seconde : nous aurons $g^2 = 2ph$, (*Num.* CLXXII.). Donc $CM \times g' = 2ph$; d'où l'on tire $g' : p :: 2h : CM :: h : \frac{1}{2}CM$. Or la force centripète & la gravité sont entr'elles comme les vîtesses g' & p qu'elles produiroient dans le même tems (*Num.* CLXVII.). Donc la force centripète F est à la gravité que j'appellerai G, comme la hauteur due à la vîtesse de projection est au demi-rayon du cercle à décrire.

CCXXXVII.

CCXXXVII.

COROLLAIRE I. *L'espace* DM *que la force centripète fait parcourir à chaque instant au mobile qui décrit une circonférence de cercle, est égal au quarré de l'espace qui seroit parcouru dans cet instant, en vertu de la vîtesse de projection, divisé par le diamètre du cercle.*

Car l'équation $\overline{MB}^2 = 2CM \times DM$, donne $DM = \frac{\overline{MB}^2}{2CM}$.

CCXXXVIII.

COROLLAIRE II. *La vîtesse* g' *que produiroit la force centripète pendant une seconde, est égale au quarré de la vîtesse de projection, divisé par le rayon.*

Car l'équation $CM \times g' = g^2$ donne $g' = \frac{g^2}{CM}$.

CCXXXIX.

COROLLAIRE III. *Dans un corps mu circulairement, la vîtesse de projection* g *est égale à la racine quarrée du produit de la vîtesse que la force centripète feroit naître pendant une seconde, multipliée par le rayon.*

Car la même équation $CM \times g' = g^2$ donne $g = \sqrt{CM \times g'}$.

CCXL.

COROLLAIRE IV. *Pour que la force centrifug des corps placés ſur l'équateur terreſtre fût égæ à la gravité, il faudroit que la Terre tournât ſi ſon axe environ dix-ſept fois plus vîte qu'elle n tourne réellement.*

En effet, pour que la force centrifuge ſoit égale à la gravité, il faut que dans la proportion $F : G :: h : \frac{1}{2} CM$, que nous avons trouvée (*Num.* CCXXXVI.), les deux termes de la ſeconde raiſon ſoient égaux, puiſqu'on ſuppoſe qu'il y a égalité entre les deux termes de la première. Donc la hauteur due à la vîteſſe de projection ſeroit $h = \frac{1}{2} CM$, & par conſéquent la vîteſſe de projection des corps placés ſur l'équateur, devroit être égale à celle qu'acquerroit un corps peſant en parcourant librement le demi-rayon de l'équateur. Or on ſait par les obſervations faites pour déterminer la figure de la Terre, que le demi-rayon ſous l'équateur eſt à peu près de 9840324 pieds, & la vîteſſe qu'acquerroit un corps peſant en parcourant cet eſpace, ſeroit $g = \sqrt{60{,}4 \times 9840324} = 24379$ pieds (*Num.* CLXXII.). Il faudroit donc, pour que la force centrifuge fût égale à la gravité, que les corps placés ſur l'équateur parcouruſſent 24379 pieds; quantité dix-ſept fois plus grande, à peu près, que celle qu'ils parcourent réellement. Car ils ne

parcourent par feconde qu'environ 1431 pieds; comme l'on peut s'en convaincre en cherchant la circonférence de l'équateur, & en la divifant par le nombre de fecondes contenues dans 24 heures.

CCXLI.

Corollaire V. *Donc la force centrifuge fous l'équateur eft à la gravité à peu près comme 1 eft à 289.*

Car fuppofons deux corps égaux placés fous l'équateur, dont l'un faffe fa révolution dans 24 heures avec une vîteffe g, tandis que l'autre feroit la fienne dans un tems dix-fept fois plus court, & par conféquent avec une vîteffe g' dix-fept fois plus grande que celle du premier. La force centrifuge du fecond de ces corps feroit égale à la gravité, comme nous venons de le voir. Si l'on appelle F & F' les forces centrifuges de ces deux mobiles, on aura (*Num.* CCXXXV.), $F : F' :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$; ou fimplement $F : F' :: g^2 : g'^2$, parce que dans le cas préfent $r = r'$. Or $g : g' :: 1 : 17$, & $g^2 : g'^2 :: 1 : \overline{17}^2 :: 1 : 289$. Donc $F : F' :: 1 : 289$; c'eft-à-dire, que la force centrifuge fous l'équateur eft à la force centrifuge qui feroit égale à la gravité, comme 1 eft à 289.

CCXLII.

Corollaire VI. En fuppofant avec Newton

que les attractions des corps célestes soient en raison inverse des quarrés des distances & en raison directe des masses attirantes, on pourra aisément déterminer le rapport des masses du Soleil & des planètes qui ont des satellites. Pour cela, observons que les orbites parcourues par ces planètes, sont à peu près circulaires, & nommons F la force attractive du Soleil sur chaque molécule d'une planète dont le tems périodique soit T, & la distance au Soleil r. Soit pareillement F' la force attractive d'une planète, par exemple, de Jupiter, sur chaque molécule de l'un de ses satellites, dont la distance à Jupiter soit r' & le tems périodique T'. Enfin imaginons un autre satellite qui tourne autour de Jupiter à la distance r, & appelons f la force attractive que Jupiter exerceroit sur lui, à cette distance. nous aurons $F : F' :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$, comme nous l'avons démontré (*Num.* CCXXXV.) ; & puisqu'on suppose que les forces attractives de Jupiter sur ses satellites sont en raison inverse des quarrés des distances, on aura $F' : f :: r^2 : r'^2$. Multipliant par ordre ces deux proportions, & divisant par F' les deux termes de la première raison du produit, on aura $F : f :: \frac{r^3}{T^2} : \frac{r'^3}{T'^2}$. Or F & f sont les forces attractives du Soleil & de Jupiter sur une molécule matérielle placée à égale distance de l'un & de l'autre,

& ces forces attractives sont évidemment comme les masses du Soleil & de Jupiter. Donc le rapport de ces masses sera exprimé par la seconde raison $\frac{r^3}{T^2} : \frac{r'^3}{T'^2}$, dans laquelle tout est supposé connu.

Au lieu de Jupiter, on peut mettre la Terre ou Saturne, qui ont aussi des satellites, & déterminer par la même méthode le rapport de la masse du Soleil à celles de ces planètes.

CCXLIII.

THÉORÈME V. *Si l'on suppose que deux mobiles mus dans des sections coniques quelconques, soient portés vers leurs foyers par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances, leurs vîtesses seront toujours en raison directe des racines quarrées des paramètres, & en raison inverse des perpendiculaires menées des foyers sur les tangentes des points, où l'on suppose les mobiles.*

En effet, soient MAZ, $M'A'Z'$ (*Fig.* 111.) les sections coniques parcourues par les mobiles, p & p' leurs paramètres, r & r' les rayons vecteurs menés aux sommets des courbes, g & g' les vîtesses des mobiles dans ces sommets, V & V' les vîtesses dans les points quelconques M & M' où l'on suppose les mobiles, OP & $O'P'$ les perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes des courbes

en ces points. Nous aurons (*Num.* CCXXIII.); $V : V' :: \frac{gr}{OP} : \frac{g'r'}{O'P'}$. Or $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$, (*Num.* CCXXIX.). Donc $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OP} : \frac{\sqrt{p'}}{O'P'}$.

CCXLIV.

COROLLAIRE I. Supposons que du même point A (*Fig.* 115.) soient lancés perpendiculairement au rayon vecteur différents mobiles, dont le premier décrive une circonférence de cercle AZ, le second une ellipse AZ', le troisième une parabole AZ'', le quatrième une hyperbole AZ''', & qu'ils soient portés vers le même foyer O par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances : *la vîtesse de projection du corps mu circulairement, sera par rapport à celle du mobile qui décrit la parabole, comme* 1 *est à* $\sqrt{2}$; *par rapport à celle du mobile qui décrit l'ellipse, comme* 1 *est à une quantité moindre que* $\sqrt{2}$; *& par rapport à celle du mobile qui décrit l'hyperbole, comme* 1 *est à une quantité plus grande que* $\sqrt{2}$.

Car en nommant V la vîtesse de projection du corps qui décrit la circonférence du cercle, V' celle du corps qui décrit l'ellipse, V'' celle du corps qui décrit la parabole, V''' celle du corps qui décrit l'hyperbole; nommant aussi respectivement p, p', p'', p''' les paramètres de ces courbes, & menant la

rayon vecteur OA perpendiculaire sur la tangente commune AT, nous aurons (*Num.* CCXLIII.),

$$V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p'}}{OA}; \; V : V'' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p''}}{OA};$$

$V : V''' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p'''}}{OA}$. Et supprimant dans les secondes raisons le dénominateur commun OA, on voit que les vîtesses de projection dans les courbes dont nous parlons, sont comme les racines quarrées de leurs paramètres. Or les paramètres du cercle, de l'ellipse, de la parabole & de l'hyperbole, sont ici respectivement $2OA$, une ligne moindre que $4OA$, $4OA$, une ligne plus grande que $4OA$ (*Num.* CCXXV.); quantités qui sont entr'elles dans le rapport de 1, d'un nombre moindre que 2, de 2, & d'un nombre plus grand que 2. Donc les vîtesses des mobiles qui décrivent la circonférence du cercle, l'ellipse, la parabole & l'hyperbole, seront entr'elles comme les racines quarrées de ces nombres.

Ainsi la vîtesse V du corps mu circulairement, sera, par rapport à la vîtesse V'' de celui qui décrit la parabole, comme $\sqrt{1}$ est à $\sqrt{2}$, ou comme 1 est à $\sqrt{2}$; par rapport à la vîtesse V' de celui qui décrit l'ellipse, comme 1 est à une quantité moindre que $\sqrt{2}$, & par rapport à la vîtesse de celui qui décrit l'hyperbole, comme 1 est à une quantité plus grande que $\sqrt{2}$.

Si la vîtesse du corps mu circulairement est moindre que celle du corps qui décrit l'ellipse, le point *A* sera l'apside inférieure; puisqu'alors le paramètre de l'ellipse étant plus grand que celui du cercle, les rayons vecteurs iront en croissant dès le point *A*. Au contraire, si la vîtesse du corps mu circulairement est plus grande que celle du corps qui se meut dans l'ellipse, le paramètre de l'ellipse sera moindre que celui du cercle, & les rayons vecteurs iront en décroissant dès le point *A*. Donc ce point sera l'apside supérieure.

On voit par ce corollaire, qu'en supposant un mobile lancé perpendiculairement au rayon vecteur avec une vîtesse donnée, & retiré vers le centre du mouvement par une force centripète aussi donnée, qui soit dans les différents points de la trajectoire réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, on pourra connoître aisément s'il doit décrire une ellipse, une parabole ou une hyperbole, & même déterminer le paramètre de la courbe qu'il décrira. Il suffira de chercher par le théorème IV. la vîtesse de projection que le mobile devroit avoir pour décrire la circonférence d'un cercle autour du foyer, & de la comparer avec la vîtesse de projection qu'il a réellement. Le quarré de la première de ces vîtesses sera au quarré de la seconde, comme le diamètre du cercle est au paramètre de la courbe décrite.

Si cette courbe eſt une parabole, ſa nature ſera exprimée par l'équation $y^2 = px$. Si le mobile doit décrire une ellipſe, la nature de la courbe ſera exprimée par $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$; & l'on déterminera le grand axe $2a$, en obſervant qu'à l'abſciſſe donnée OA répond une ordonnée connue qui vaut $\frac{1}{2}p$. mettant donc dans l'équation générale $\frac{1}{2}p$ au lieu de y, & OA au lieu de x, il ne reſtera d'inconnu que a, que l'on trouvera en réſolvant l'équation. Il en ſera de même ſi le mobile décrit une hyperbole. La nature de la courbe ſera exprimée par l'équation $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$; & l'on trouvera le grand axe $2a$, en mettant dans cette équation $\frac{1}{2}p$ au lieu de y & OA au lieu de x.

CCXLV.

COROLLAIRE II. Un mobile ſollicité par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des diſtances, étant lancé ſuivant la tangente *MT* (*Fig.* 116.), qui fait avec le rayon vecteur donné *OM* un angle connu *PMO*, la vîteſſe de projection & la force centripète en *M* étant auſſi connues, il eſt facile de déterminer l'eſpèce & la nature de la ſection conique *MAZ* qu'il doit décrire.

En effet, ayant abaiſſé du foyer la perpendicu-

laire OP ſur la tangente menée au point M, on connoîtra dans le triangle rectangle OPM l'hypothénuſe OM & les trois angles : on trouvera par conſéquent les deux côtés OP & PM. Imaginant enſuite un mobile ſoumis à la force centripète qui a lieu en M, & qui décrive autour du foyer une circonférence dont le rayon ſoit OM, on trouvera la vîteſſe du mobile par le théorème IV. Nommons V cette vîteſſe & V' celle du corps qui décrit la courbe MAZ, p le paramètre connu du cercle, & p' celui de la même courbe MAZ : nous aurons (*Num.* CCXLIII.) $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OM} : \frac{\sqrt{p'}}{OP}$, proportion dans laquelle tout eſt connu, excepté le paramètre p'. Donc on trouvera ſa valeur.

Cela poſé, ſoit MH la normale de la courbe au point M, & du point H où elle rencontre l'axe, abaiſſons ſur le rayon vecteur la perpendiculaire HR, nous aurons le ſegment $MR = \frac{1}{2}p'$; & les deux triangles ſemblables POM, RMH donneront $PO : OM :: RM : MH$, proportion dont les trois premiers termes ſont connus : donc on connoîtra la normale MH.

Enfin tirant du foyer la ligne OL perpendiculaire à la normale, on aura $OL = PM$, & LH vaudra la différence de MH & de PO. Donc on trouvera auſſi la valeur de l'hypothénuſe OH, partie de l'axe compriſe entre la normale & le foyer. Menant

u point M l'ordonnée MG de la courbe, les riangles OLH, MGH, qui ont un angle commun n H & qui sont rectangles l'un & l'autre, donneront les proportions $OH : LH :: MH : GH$; $OH : OL :: MH : MG$. Donc on trouvera la valeur de la sous-normale GH, & de l'ordonné MG.

Or la courbe décrite sera une parabole, une ellipse ou une hyperbole, suivant que l'on aura $GH = \frac{1}{2}p'$, ou $GH < \frac{1}{2}p'$, ou $GH > \frac{1}{2}p'$. Donc par cette méthode on déterminera l'espèce de la section conique parcourue par le mobile.

Quant à la nature de la courbe, il est évident 1° que si cette courbe est une parabole, sa nature sera exprimée par l'équation $y^2 = p'x$. 2° Si la courbe décrite est une ellipse, sa nature sera exprimée par l'équation $y^2 = p'x - \frac{p'x^2}{2a}$, en nommant $2a$ le grand axe. Pour trouver la valeur de a, on observera qu'au point M, cette équation devient $\overline{GM}^2 = p'x - \frac{p'x^2}{2a}$, & que pour le même point on a toujours $GH = \frac{1}{2}p' - \frac{p'x}{2a}$. Ces deux équations feront connoître les valeurs du grand axe $2a$ & de l'abscisse AG correspondante au point M. On procédera de la même manière, si le mobile décrit une hyperbole. Alors l'équation de la courbe sera $y^2 = p'x + \frac{p'x^2}{2a}$, & l'on déterminera le grand axe

$2a$, en obſervant qu'au point M cette équ devient $\overline{GM}^2 = p'x + \frac{p'x^2}{2a}$, & que pour le point on a $GH = \frac{1}{2}p' + \frac{p'x}{2a}$, équations qui neront les valeurs de x & de a.

CCXLVI.

Corollaire III. *Si deux mobiles déc des ellipſes*, ADBE, A'D'B'E' (Fig. 117.) *les foyers deſquelles ils ſoient portés par des centripètes réciproquement proportionnelles quarrés des rayons vecteurs, leurs vîteſſes les diſtances moyennes ſeront en raiſon inverſ racines quarrées de ces diſtances.*

Car ſoient C & C' les centres des ellipſes, O' les foyers, p & p' les paramètres, AB & A' grands axes, ED & $E'D'$ les petits, OP & les perpendiculaires menées ſur les tangente paſſent aux extrémités des petits axes, enfin V les vîteſſes des mobiles à ces extrémités D & où ils ſe trouvent dans leurs diſtances moye des foyers. Nous aurons $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OP} : \frac{\sqrt{}}{O}$ d'où l'on tire $V^2 : V'^2 :: \frac{p}{\overline{OP}^2} : \frac{p'}{\overline{O'P'}^2}$. ($= \frac{\overline{ED}^2}{AB} = \frac{4\overline{CD}^2}{2OD}$, & $OP = CD$, puiſque

lignes sont des parallèles comprises entre parallèles (*Num.* CCXXV.). De même $p' = \frac{4\overline{C'D'}^2}{2\,O'D'}$, & $O'P' = C'D'$. Substituant donc ces valeurs dans la proportion précédente, on aura $V^2 : V'^2 :: \frac{4\overline{CD}^2}{2OD \times \overline{CD}^2} : \frac{4\overline{C'D'}^2}{2O'D' \times \overline{C'D'}^2} :: \frac{1}{OD} : \frac{1}{O'D'}$.

Donc $V : V' :: \frac{1}{\sqrt{OD}} : \frac{1}{\sqrt{O'D'}}$.

CCXLVII.

Corollaire IV. Si l'on suppose que les deux foyers O & O' tombent l'un sur l'autre, & que $A'D'B'E'$ soit une circonférence dont le rayon $O'D' = OD$, alors dans la proportion $V : V' :: \frac{1}{\sqrt{OD}} : \frac{1}{\sqrt{O'D'}}$, les termes de la seconde raison seront égaux : donc on aura $V = V'$; c'est-à-dire, *qu'un mobile qui décrit une ellipse* ADBE, *a, dans sa distance moyenne, la même vîtesse qu'auroit un autre mobile qui décriroit une circonférence de cercle, dont le rayon seroit cette distance moyenne;* en supposant toujours que les forces centripètes des deux mobiles soient en raison inverse des quarrés des distances.

CCXLVIII.

Remarque. Nous avons observé (*Num.*

CCXXXV.) que dans le mouvement d'un c qui décrit une circonférence de cercle, la f centrifuge est égale à la force centripète. Quan mobile décrit d'autres courbes, on peut consid la force centrifuge ou par rapport au centre cercle osculateur, ou par rapport au centre mouvement. Dans le premier cas, il est évi qu'*elle sera dans chaque point proportionnelle quarré de la vîtesse, divisé par le rayon de c bure correspondant à ce point.* Car un arc inf ment petit de la courbe se confond avec un égal du cercle osculateur. Donc on peut consid le mobile à chaque instant comme décrivant arcs de cercle infiniment petits, mais dont rayons changent continuellement. Or dans tou mouvements circulaires les forces centrifuges comme les quarrés des vîtesses divisés par les ray Mais il faut bien remarquer que les forces cen fuges dont le rapport est ainsi évalué, sont efforts que le mobile fait dans les différents po de la trajectoire, pour s'éloigner du centre de c bure, & non les efforts qu'il fait pour s'éloig du point fixe vers lequel les forces centripètes dirigées.

Si l'on considère les forces centrifuges par port à ce point fixe que nous avons appelé le ce du mouvement, on peut dire qu'*elles sont en ra inverse des rayons vecteurs multipliés par*

quarrés des perpendiculaires, que l'on peut abaisser du centre des forces sur les tangentes des points, où l'on suppose les mobiles.

Car supposons qu'un mobile décrive la courbe *MAZ* (*Fig.* 118.), que ses vîtesses aux points *M* & *M'* soient *V* & *V'*. Ayant mené les rayons vecteurs *OM*, *OM'*, & les perpendiculaires *OP*, *OP'* sur les tangentes des points *M* & *M'*, nommons *F* & *F'* les forces centrifuges dans ces points. Il est évident que si le mobile étoit lancé perpendiculairement aux rayons vecteurs, il feroit, pour s'éloigner du point *O*, des efforts équivalents aux forces centripètes requises pour lui faire décrire des circonférences de cercle. Or ces forces centripètes seroient comme les quarrés des vîtesses divisés par les rayons *OM* & *OM'* des cercles décrits: donc les forces centrifuges sont dans le même rapport, & l'on a $F : F' :: \frac{V^2}{OM} : \frac{V'^2}{OM'}$. Or $V : V' :: \frac{1}{OP} : \frac{1}{OP'}$ (*Num.* CCXXII.). Donc en substituant le second rapport au lieu du premier; on aura $F : F'$ $:: \frac{1}{OM \times \overline{OP}^2} : \frac{1}{OM' \times \overline{OP'}^2}$.

On peut conclure de là, que *les forces centrifuges dans les apsides* A & B (*Fig.* 117.) *d'une ellipse, sont en raison inverse des cubes des rayons vecteurs menés à ces apsides.* Car ces rayons vecteurs sont égaux aux perpendiculaires abaissées du foyer sur

les tangentes de ces apsides. Donc en appelan
force centrifuge en A, & F' la force centrifu
B, on aura $F : F' :: \frac{1}{\overline{OA}^3} : \frac{1}{\overline{OB}^3}$; ce qu
voir que les forces centrifuges d'un corps qu
crit une ellipse, croissent de l'apside supéri
l'apside inférieure, dans un plus grand rappo
les forces centripètes ; puisque celles-ci cro
comme les quarrés des distances diminuent,
que les premières croissent comme diminue
cubes des distances.

Du reste, pour lever toute équivoque au
du rapport que nous établissons entre les f
centrifuges, il est à propos d'observer que pa
forces nous entendons (& la démonstration p
dente le suppose), non pas les efforts que fa
tuellement le mobile dirigé obliquement au r
vecteur, pour s'éloigner du centre du mouven
mais les efforts qu'il est capable de faire & qu'
roit réellement pour s'éloigner de ce centre,
direction étoit perpendiculaire au rayon vecte

SECTION IV.

Du Mouvement des Centres de gravité.

CCXLIX.

LEMME. *Quand il se trouve un facteur com dans deux produits égaux, on peut lui subst*

un autre facteur quelconque, sans détruire l'égalité.

Cela est évident : car si $ag + bg + cg$, &c. $= pg + qg + rg$, &c., on aura $a + b + c$ &c. $= p + q + r$ &c.; & multipliant les deux membres de l'équation par une quantité quelconque m, elle deviendra $am + bm + cm$ &c. $= pm + qm + rm$ &c.

CCL.

THÉORÈME I. *Si toutes les parties d'un corps se meuvent dans l'espace avec des vîtesses égales & suivant des directions parallèles, la résultante de leurs mouvements particuliers passera par le centre de gravité.*

Pour le démontrer, soit le corps M (*Fig.* 119.) dont tous les éléments se meuvent avec la même vîtesse suivant des directions parallèles, & soit AB la direction du centre de gravité. Concevons deux plans KL, HI qui se coupent dans cette ligne AB. Les moments des poids élémentaires placés d'un côté du plan KL, seront égaux aux moments des poids élémentaires placés de l'autre côté du même plan (*Num.* LXIV.) : ainsi en nommant D, D', D'', &c. les distances de ce plan aux molécules qui se trouvent d'un côté, d, d', d'', &c. ses distances aux molécules qui se trouvent de l'autre, & g le poids de chaque molécule, nous aurons $Dg + D'g + D''g$ &c. $= dg + d'g + d''g$ &c. Or au lieu du facteur commun g, nous pouvons, sans détruire

S

l'égalité, mettre un autre facteur m qui exprime le mouvement de chaque molécule du corps M, & nous aurons l'équation $Dm + D'm + D''m$ &c. $= dm + d'm + d''m$ &c. Donc les mouvements ou forces des molécules placées de part & d'autre du plan KL, ont des moments égaux par rapport à ce plan, & par conséquent leur résultante doit se trouver dans ce plan.

On démontrera de même, que cette résultante doit se trouver dans le plan HI. Or elle ne peut pas être en même tems dans les deux plans KL, HI, à moins qu'elle ne soit dirigée, suivant leur commune intersection AB, & qu'elle ne passe ainsi par leur centre de gravité.

Si l'on nomme V la vîtesse avec laquelle chaque élément est transporté, pour avoir la résultante de tous les mouvements particuliers, qui passe par le centre de gravité, il faudra multiplier V par la somme des éléments, c'est-à-dire, par la masse M du corps, ce qui donnera MV pour la valeur de cette résultante.

CCLI.

COROLLAIRE I. *Toute force dirigée par le centre de gravité d'un corps, doit communiquer la même vîtesse à tous ses éléments.*

Car cette force pourra se représenter par la masse M du corps, multiplié par une vîtesse V. Donc elle seroit la résultante des mouvements

qu'auroient les molécules du corps, chacune étant transportée avec la vîtesse V suivant des directions parallèles. Or l'effet d'une résultante quelconque doit être le même que celui des mouvements composants. Donc la force MV dirigée par le centre de gravité du corps, communiquera la même vîtesse V à tous ses éléments.

On peut aussi démontrer la même proposition de la manière suivante. Le corps étant en repos, se trouve dans le même état que si chacun de ses éléments avoit reçu, suivant des directions parallèles, deux vîtesses V & $-V$. Or la force MV imprimée par le centre de gravité, détruit les vîtesses $-V$; puisqu'elle détruit la résultante des mouvements qui naîtroient de ces vîtesses. Donc après l'action de cette force, chaque élément doit avoir la vîtesse V.

On voit par là, que toute force dirigée par le centre de gravité, communiquera au corps un simple mouvement de translation, sans le faire tourner en aucun sens.

CCLII.

COROLLAIRE II. *Toute force imprimée à un corps, suivant une direction qui passe hors du centre de gravité, ne peut communiquer la même vîtesse à tous ses éléments.*

Car si tous les éléments prenoient la même vîtesse, leurs mouvements auroient pour résultante une force dirigée par le centre de gravité;

& différente par conséquent de la force imprimée.

De là on doit conclure, qu'*une force transmise à un corps suivant une direction qui passe hors du centre de gravité, communiquera nécessairement à ce corps un mouvement de rotation.* Car un corps dont tous les éléments n'ont pas la même vîtesse, tourne sur lui-même.

CCLIII.

THÉORÈME II. *Si deux corps décrivent des droites parallèles, leur centre commun de gravité décrira une ligne parallèle à leurs directions.*

Pour le démontrer, soient deux mobiles A & B (*Fig.* 120.) mus suivant les lignes parallèles AM, BN, & dont le centre de gravité soit le point G. Je dis que la route de ce centre de gravité sera la ligne GH parallèle aux directions AM, BN. Car supposons les deux mobiles parvenus aux points a & b de ces directions. Ayant joint ces points par la droite ab, le centre de gravité sera dans quelque point g de cette ligne, tel que l'on ait la proportion $A+B : A :: ab : bg$. Or si l'on mène sur BN les perpendiculaires ap, gr, les triangles semblables apg, grb donneront $ab : bg :: ap : gr$; donc $A+B : A :: ap : gr$; d'où l'on tire $gr = \frac{A \times ap.}{A+B}$

Les mobiles étant parvenus à deux autres points quelconques a', b' de leurs directions, on trouvera de même que leur centre de gravité g' sera éloigné de

la ligne BN d'une quantité $g'r' = \frac{A \times a'p'}{A+B} = \frac{A \times ap}{A+B}$, en ſuppoſant que $a'p'$ & $g'r'$ ſoient abaiſſées perpendiculairement des points a' & g' ſur la ligne BN. Donc le centre de gravité des deux mobiles eſt toujours également éloigné de la ligne BN, & par conſéquent ſa route eſt parallèle à cette ligne.

CCLIV.

COROLLAIRE. *Si pluſieurs corps* A, B, C, D, &c., *en tel nombre qu'on voudra, décrivent des droites parallèles, la route de leur centre commun de gravité ſera une ligne parallèle à leurs directions.*

Car en regardant les deux corps A & B comme réunis au centre de gravité de leur ſyſtème, & ne formant qu'un ſeul & même corps qui décrit une ligne parallèle à leurs directions; ſi l'on combine ce corps avec un autre C, on verra par la démonſtration précédente, que le centre de gravité du nouveau ſyſtème décrira une ligne parallèle aux directions des corps dont le ſyſtème eſt compoſé. La même choſe ſe démontrera, en allant de proche en proche, pour un ſyſtème compoſé de quatre corps, de cinq corps, & en général d'un nombre quelconque de corps.

CCLV.

THÉORÈME III. *La vîteſſe du centre de gravité de deux corps mus uniformément, ſuivant des lignes parallèles, eſt uniforme.*

Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que le centre de gravité décrit des eſpaces égaux en tems égaux. Suppoſons donc que dans un tems déterminé, par exemple, dans une ſeconde, les mobiles *A* & *B* (*Fig.* 120.) aient décrit les eſpaces *Aa*, *Bb* : dans la ſeconde ſuivante ils décriront *aa'*, *bb'*, & l'on aura $aa' = Aa$, $bb' = Bb$. Si l'on tire à préſent la parallèle *GH* que le centre de gravité doit parcourir, & les droites *AB*, *ab*, *a'b'* qui la rencontrent aux points *G*, *g*, *g'*; on voit que le centre de gravité parcourra dans la première ſeconde *Gg*, & dans la ſeconde ſuivante *gg'*. Or dans le trapèze *ABb'a'*, les baſes *Aa'*, *Bb'*, & par conſéquent toutes les lignes menées parallèlement à ces baſes, ſeront diviſées en parties égales par la droite *AB*. Donc on aura $Gg = gg'$; c'eſt-à-dire, qu'en tems égaux le centre de gravité décrit des eſpaces égaux.

Si les deux mobiles *A* & *B* (*Fig.* 121.) ſe meuvent uniformément en ſens oppoſés, dans des lignes parallèles, & que dans deux ſecondes conſécutives le premier parcoure les eſpaces égaux *Aa*, *aa'*, le ſecond les eſpaces égaux *Bb*, *bb'*; on voit en menant les lignes *AB*, *ab*, *a'b'*, qui coupent la direction du centre de gravité aux points *G*, *g*, *g'*, qu'il décrira dans ces deux ſecondes, les lignes *Gg*, *gg'*. Or il eſt évident que $Gg = gg'$; puiſqu'en nommant *E* le point d'interſection des lignes *AB*, *a'b'*, on a deux triangles ſemblables *AEa'*, *BEb'*, dont les

bases Aa', Bb', ne peuvent être divisées en parties égales par la droite ab, à moins qu'elle ne passe par le milieu de tous les éléments parallèles à ces bases, & conséquemment par le milieu de Gg'.

CCLVI.

COROLLAIRE. *Si plusieurs corps, en tel nombre qu'on voudra, décrivent uniformément des lignes parallèles, la vîtesse de leur centre commun de gravité sera uniforme.*

Car en regardant les deux premiers corps comme réunis au centre de gravité de leur système, & ne formant qu'un seul & même corps, qui se meut uniformément, on pourra le combiner avec le troisième des corps proposés; & l'on verra par la démonstration précédente, que le centre de gravité du nouveau système doit prendre une vîtesse uniforme. La même chose se démontrera en allant de proche en proche, pour un système de quatre mobiles, de cinq mobiles, & généralement d'un nombre quelconque de mobiles.

CCLVII.

THÉORÈME IV. *La vîtesse du centre de gravité de tant de corps que l'on voudra, qui se meuvent uniformément dans des lignes parallèles, est égale à la différence de leurs mouvements divisée par la somme des masses; c'est-à-dire, que pour avoir la vîtesse du centre de gravité, il faut prendre les*

mouvements de tous les corps qui vont en un sens, en soustraire les mouvements de ceux qui vont en sens contraire, & diviser la différence par la somme des masses.

Supposons en effet, les quatre mobiles A, B, C, D (*Fig.* 122.), qui dans le même tems t parcourent suivant leurs lignes parallèles, les espaces Aa, Bb, Cc, Dd, avec les vîtesses V, V', V'', V'''; tandis que le centre de gravité G décrira dans la parallèle GH l'espace Gg, avec une vîtesse x qu'il s'agit de déterminer. Nous aurons $Aa = Vt$, $Bb = V't$, $Cc = V''t$, $Dd = V'''t$, $Gg = xt$.

Imaginons à présent un plan $MNHRS$ perpendiculaire aux directions des mobiles. Selon ce qui a été dit (*Num.* LXIV.), le moment de tous les corps réunis au point G, pris par rapport à ce plan, est égal à la somme des moments de ces corps placés aux points A, B, C, D; ce qui donne l'équation $\overline{A+B+C+D} \times HG = A \times AM + B \times BN + C \times CR + D \times DS$. De même le moment de tous les corps réunis au point g, est égal à la somme des moments de ces corps placés aux points a, b, c, d; ce qui donne cette autre équation $\overline{A+B+C+D} \times Hg = A \times aM + B \times bN + C \times cR + D \times dS$. Retranchant de cette seconde équation la première, nous aurons

$$\overline{A+B+C+D} \times \overline{Hg - HG} = A \times \overline{aM - AM}$$

$+B\times\overline{bN-BN}+C\times\overline{cR-CR}+D\times\overline{dS-DS}$; c'est-à-dire, $\overline{A+B+C+D}\times Gg=A\times Aa$ $-B\times Bb+C\times Cc-D\times Dd$; ou mettant au lieu des lignes Aa, Bb, Cc, Dd, Gg, leurs valeurs, $\overline{A+B+C+D}\times xt=A\times Vt-B\times V't+C\times V''t$ $-D\times V'''t$; d'où l'on tire

$$x=\frac{AV-BV'+CV''-DV'''}{A+B+C+D}.$$

Donc la vîtesse du centre de gravité des quatre corps proposés, est égale à la différence de leurs mouvements divisée par la somme des masses. Il est évident que la démonstration seroit la même, quel que fût le nombre des corps mus parallèlement.

CCLVIII.

COROLLAIRE I. Si tous les mobiles qui décrivent uniformément des lignes parallèles, étoient réunis au centre commun de gravité, en un seul corps animé de tous les mouvements qu'ils ont en particulier, la force ou le mouvement de celui-ci vaudroit la différence des mouvements opposés; & pour avoir sa vîtesse, il faudroit diviser cette différence par la masse du corps, c'est-à-dire, par la somme des masses de tous les mobiles. Donc *le centre de gravité se meut ou tend à se mouvoir de la même manière, que si tous les corps étoient réunis à ce centre, & que les forces des différents corps lui fussent immédiatement appliquées.*

CCLIX.

Corollaire II. *Quelles que ſoient les directions de pluſieurs corps qui décrivent uniformément des lignes droites, le centre de gravité ſe meut toujours ou tend à ſe mouvoir de la même manière que ſi tous les corps étoient réunis à ce centre, & qu'ils ne formaſſent qu'un ſeul mobile ſollicité par les forces dont ils ſont animés.*

Car ayant imaginé trois plans que je nomme *X*, *Y*, *Z*, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres, on peut décompoſer le mouvement ou la force de chaque corps, en trois autres perpendiculaires à ces plans (*Num.* L.). Cela poſé, la réſultante de tous les mouvements perpendiculaires au plan *X*, communiqueroit ou tendroit à communiquer au centre de gravité une vîteſſe uniforme, perpendiculaire à ce plan, & égale à la différence de ces mouvements diviſée par la ſomme des maſſes. On peut dire la même choſe de chaque réſultante des mouvements perpendiculaires aux deux plans *Y* & *Z*. Or en ſuppoſant tous les corps réunis au centre de gravité, de manière qu'ils ne formaſſent qu'un ſeul mobile ſollicité par toutes les forces dont ils ſont réellement animés, il eſt viſible que l'on pourroit décompoſer chacune de ces forces en trois autres perpendiculaires aux plans *X*, *Y*, *Z*, & que les trois réſultantes des forces perpendiculaires à ces plans, ſeroient les mêmes que dans le premier

as, où les mobiles ſuivoient leurs directions ſans être concentrés en un ſeul & même point. Donc le mouvement du centre de gravité doit être le même dans l'un & l'autre cas.

CCLX.

REMARQUE. Juſqu'à préſent nous avons ſuppoſé que les mobiles ſuiviſſent librement leurs directions ſans agir les uns ſur les autres, & ſans ſe gêner dans leurs mouvements. Mais comme il eſt eſſentiel auſſi de conſidérer le mouvement du centre de gravité dans le cas où les corps qui compoſent un même ſyſtème, agiſſent les uns ſur les autres, & dérangent par leur action les mouvements primitifs qu'ils avoient reçus ; nous obſerverons d'abord, que les corps n'agiſſent les uns ſur les autres que de trois manières différentes qui nous ſoient connues : ou par impulſion immédiate, comme dans le choc ordinaire ; ou par le moyen de quelque corps interpoſé entr'eux, & auquel ils ſont attachés ; ou enfin par une vertu d'attraction réciproque, comme font dans le ſyſtème Newtonien le Soleil & les planètes. Cela poſé, nous nous arrêterons un moment aux proportions ſuivantes, qui ſont d'un fréquent uſage en Méchanique.

CCLXI.

THÉORÈME V. *L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité de pluſieurs corps qui*

agissent les uns sur les autres par impulsion immédiate, ou par le moyen de quelque corps interposé auquel ils sont attachés, ne change point par l'action mutuelle de ces corps, pourvu que le système entier soit libre; c'est-à-dire, qu'il ne soit point assujetti à tourner autour d'un point fixe.

En effet, quels que soient les mouvements que prendront les différents corps qui sont partie du système, on peut toujours concevoir les mouvements primitifs comme composés de ceux-là, & d'autres qui n'auront pas lieu (*Num.* CCII.). Donc en vertu des mouvements imprimés, le centre de gravité doit être dans le même état qu'en vertu des mouvements que les différents corps prendront, & des seconds mouvements qui n'auront pas lieu. Or par le principe de M. *d'Alembert*, en vertu de ces seconds mouvements, le système entier doit être en équilibre, & par conséquent il ne doit survenir aucun changement dans l'état du centre de gravité: donc son état en vertu des mouvements imprimés, doit être celui qu'il aura en vertu des mouvements que les différents corps seront forcés de prendre par leur action mutuelle.

Ainsi, dans un système de plusieurs corps qui ne changent leurs directions & leurs vîtesses qu'en se choquant les uns les autres, ou qu'en se tirant par des fils, par des verges inflexibles, ou en général par des liens quelconques, le centre de gravité se

meut ou tend à se mouvoir, comme si les corps obéissant librement aux impulsions primitives, ne se génoient point dans leurs mouvements ; c'est-à-dire, comme si toutes les impulsions primitives étoient immédiatement appliquées à ce centre. (*Num.* CCLIX.).

CCLXII.

COROLLAIRE. Un corps de figure quelconque, n'est qu'un systême de molécules unies qui s'entraînent dans leurs mouvements par leur adhésion mutuelle. Donc *si une force représentée par* FA (*Fig.* 123.) *& dirigée comme on voudra, se transmet toute entière à un corps* P, *le centre de gravité prendra le même mouvement que si la force lui étoit immédiatement appliquée* : il décrira uniformément une ligne *LH* parallèle à la direction de la force imprimée, avec une vîtesse égale à cette force divisée par la masse du corps (*Num.* CCLVII.). Et si plusieurs forces agissent en même tems sur différents points de ce corps, le centre de gravité sera mu, comme si toutes les forces lui étoient immédiatement appliquées.

CCLXIII.

REMARQUE. Nous avons démontré (*Num.* CCL.) que si tous les éléments d'un corps sont mus parallèlement avec la même vîtesse, la résultante de leurs mouvements est toujours une force parallèle

dirigée par le centre de gravité : d'où il suit que si toutes les forces appliquées aux différents points d'un corps ne sont pas réductibles à une seule dirigée par ce centre, il est impossible que toutes les parties du corps prennent la même vîtesse. Il faudra donc que le mobile pirouette sur lui-même, & tourne autour du centre de gravité, qui décrira une ligne droite, avec une vîtesse uniforme. M. *d'Alembert*, & après lui plusieurs Géomètres, ont donné des méthodes pour déterminer généralement tous les mouvements de rotation que doit prendre un mobile de figure quelconque, sollicité par tant de puissances qu'on voudra, suivant des directions quelconques. Ces méthodes, dont on a fait les applications les plus heureuses, ne pouvant être insérées dans cet ouvrage, nous nous contenterons de démontrer, que *si le corps ne reçoit l'impulsion que d'une seule force, & que le plan mené par le centre de gravité & par la direction de cette force, divise le corps en deux parties égales & semblables, le corps doit tourner autour du centre de gravité, de la même manière que si ce centre étoit fixe.*

Soit donc *FK* (*Fig.* 123.) la direction d'une force transmise au corps *P*, & représentée par *FA*. Du point *F* menons par le centre de gravité *G* la droite *FV*. Par le point *G* tirons les deux lignes *IK*, *HL*, la première perpendiculaire, la seconde parallèle à la direction de la force *FA*, & supposons

e le plan *FKG* prolongé coupe le corps en deux oitiés parfaitement semblables. Nous pourrons ̇compofer la force *FA* en deux autres *FM*, *FN*, première dirigée au centre de gravité, la seconde ̇rpendiculaire à *FK*, en formant le parallélo-ramme *AMFN*. Au lieu de la force *FM*, nous ourrons en prendre une autre égale *GV*, sur la ̇ême direction, & appliquée au centre même de ravité. Enfin celle-ci pourra se décompofer en deux ouvelles forces *GH*, *GI*, la première parallele, la seconde perpendiculaire à *FK*. Il suffira pour ̇tte décompofition, de former le parallélogramme *HVI*.

Cela pofé, on voit que le mobile follicité par la rce *FA*, fe trouve dans le même état que s'il oit foumis aux trois forces *FN*, *GH*, *GI*. Or, à ufe des triangles égaux *FAM*, *GHV*, on a $H = FA$, $AM = HV$, ou $FN = GI$. Le centre gravité fera donc mu en vertu de la feule force $H = FA$, & les deux forces *FN*, *GI*, qui font gales, parallèles & oppofées, ne pourront lui donner aucun mouvement de tranflation. Mais comme les ne font pas oppofées fuivant la même ligne, les ne fe feront pas équilibre, & par conféquent les communiqueront au corps un mouvement de tation, qui au furplus ne dépendra que de la force *N*, puifque la force *GI* eft appliquée au centre de ravité.

Tout ſe réduit donc à faire voir, que la force *FN* doit faire tourner le corps autour du centre de gravité, comme la force *FA* le feroit tourner, ſi ce centre étoit immobile. Or 1° ſoit que le centre de gravité ſoit fixe, ſoit qu'il ſe meuve ſuivant *GH*, toutes les parties du corps doivent tourner parallèlement au plan *FKG*; puiſque le corps étant coupé par ce plan en deux moitiés parfaitement ſemblables, il ne peut y avoir de raiſon pour qu'il vacille d'un côté du plan plutôt que de l'autre. 2° Si le centre *G* étoit fixe, le moment de la puiſſance *FA* qui feroit tourner le corps, feroit $FA \times GK$; & dans le cas où le centre de gravité ſe meut, ſi l'on prolonge la direction de la puiſſance *FN* juſqu'au point *L*, où elle rencontre la perpendiculaire *GL*, le moment de *FN* ſera $FN \times GL$. Or les triangles ſemblables *FAM*, *FKG* donnent la proportion $FA : AM :: FK : GK$, ou mettant pour *AM* & *FK* les lignes *FN*, *GL*, qui leur ſont égales, $FA : FN :: GL : GK$; d'où l'on tire $FA \times GK = FN \times GL$. Donc les moments des forces *FA* & *FN* ſont égaux, & par conſéquent ces forces doivent produire le même mouvement de rotation autour du centre de gravité.

CCLXIV.

THÉORÈME VI. *Si deux mobiles* M & M' (Fig. 124.) *lancés ſuivant des directions quelconques*

M A

MA, M'A', *s'attirent par des forces qui ſoient en raiſon directe des maſſes attirantes, & en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, leur centre de gravité* G *ſe meut ou tend à ſe mouvoir, comme ſi les corps ne s'attiroient pas.*

Car ſoient *MA*, *M'A'* les eſpaces que décriroient dans un tems infiniment petit, les deux mobiles, s'ils étoient libres; *MB* & *M'B'* les eſpaces qu'ils décriroient, dans le même tems, en vertu de leurs attractions mutuelles: il eſt évident qu'en achevant les parallélogrammes *MADB*, *M'A'D'B'*, ils décriront les diagonales infiniment petites *MD*, *M'D'*. Il eſt évident auſſi que le centre de gravité ſera dans le même état, en vertu des mouvements ſuivant ces diagonales, qu'en vertu des mouvements primitifs & des mouvements produits par les attractions des corps; puiſque c'eſt de ces deux mouvements que réſultent les mouvements ſuivant les diagonales. Or, en vertu des mouvements produits par les forces attractives, le centre de gravité doit demeurer en repos: donc ſon état, en vertu des mouvements que les corps prendront, ſuivant les diagonales *MD*, *M'D'*, eſt le même qu'il auroit en vertu de leurs mouvements primitifs ſuivant les directions *MA* & *M'A'*.

Voici comment on peut démontrer, qu'en vertu des mouvements produits par les forces attractives, le centre de gravité doit demeurer en repos. Les

espaces MB & $M'B'$ étant proportionnels aux forces attractives, & ces forces elles-mêmes étant comme les masses attirantes divisées par le quarré de la distance, nous aurons $MB : M'B' :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M}{\overline{MM'}^2}$ $:: M' : M$. Or, par la propriété du centre de gravité, $M' : M :: GM : GM'$; donc $GM : GM'$ $:: MB : M'B'$; d'où l'on tire $GM : GM'$ $:: GM - MB : GM' - M'B' :: GB : GB'$. Donc $GB : GB' :: M' : M$, & par conséquent les corps M & M' parvenus aux points B & B' par l'action des forces attractives, auroient encore leur centre de gravité au même point G.

On démontrera de même, que *si les attractions des mobiles sont proportionnelles aux masses attirantes divisées ou multipliées par une puissance quelconque des distances, le centre de gravité se meut ou tend à se mouvoir, comme si les mobiles ne s'attiroient pas.* Seulement dans la proportion $MB : M'B' :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M}{\overline{MM'}^2}$, au lieu de diviser M' & M par $\overline{MM'}^2$, il faudra les diviser ou les multiplier par la puissance des distances marquée par la loi des attractions *.

* Quel que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement en raison directe des masses, multipliées ou divisées par une puissance quelconque des distances, l'état du centre

CCLXV.

REMARQUE. Si deux mobiles lancés comme on voudra dans un même plan, & qui exercent l'un ſur l'autre des forces attractives proportionnelles aux maſſes diviſées ou multipliées par une puiſſance quelconque des diſtances, reçoivent en même tems de nouvelles vîteſſes égales, parallèles & dans le même ſens, ils auront à chaque inſtant les mêmes poſitions relatives, que s'ils n'avoient pas reçu ces vîteſſes.

En effet, ſuppoſons que les mobiles (*Fig.* 125.) lancés aux points *M* & *M'* ſuivant les directions *MX*, *M'X'*, doivent décrire dans le premier inſtant les lignes *MA*, *M'A'*, en vertu de leurs attractions mutuelles & des impulſions primitives. Leur poſition reſpective à la fin de cet inſtant, ſera déterminée par la longueur & par la direction de

---

commun de gravité ne ſera point altéré par les attractions. Pour le démontrer, j'imagine trois plans qui ſe coupent perpendiculairement au centre commun de gravité : je décompoſe les mouvements produits dans chaque corps par les attractions des autres, en deux nouveaux, l'un perpendiculaire & l'autre parallèle au premier de ces plans. Je trouve que la réſultante de tous les mouvements perpendiculaires, eſt zéro ; d'où je conclus que le centre de gravité ne doit prendre aucun mouvement, qui le faſſe ſortir du premier plan. Je trouve de même, qu'il ne ſortira pas des deux autres plans. Donc l'attraction mutuelle des corps ne change en rien l'état du centre commun de gravité.

la ligne AA'. Si les mobiles reçevoient de plus aux points M & M' des impulsions dans le même sens, capables de leur faire décrire les lignes MB, $M'B'$ égales & parallèles, on voit en faisant les parallélogrammes $MAaB$, $M'A'a'B'$, qu'à la fin du premier instant, ils arriveroient aux points a, a ; & leur position respective seroit déterminée par la longueur & par la direction de la ligne aa'. Or les lignes AA', aa' menées aux extrémités des droites Aa, $A'a'$ égales & parallèles, sont elles-mêmes égales & parallèles. Donc à la fin du premier instant, les mobiles auront la même position respective, que s'ils n'avoient point reçu les vîtesses égales suivant les lignes parallèles MB, $M'B'$.

Ayant prolongé les lignes MA, $M'A'$, Ba, $B'a'$, Aa, $A'a'$, jusqu'aux points Z, Z', z, z', b, b', de manière que les prolongements soient égaux aux lignes mêmes ; on voit 1° que les mobiles parvenus aux points A & A' seroient soumis à leurs attractions mutuelles & à des forces capables de leur faire décrire dans le second instant égal au premier, les lignes AZ, $A'Z'$. On voit 2° que les mobiles parvenus aux points a & a' seroient soumis de même à leurs attractions & à des forces capables de leur faire décrire les lignes az, ab, $a'z'$, $a'b'$. Cela posé, les mobiles soumis à ces dernières forces, prendroient la même position relative, que s'ils n'étoient sollicités que par leurs attractions & par les forces

capables de faire parcourir les lignes az, $a'z'$, comme nous venons de le démontrer : or il est évident que s'ils n'étoient sollicités que par leurs attractions & par les forces capables de leur faire parcourir les lignes az, $a'z'$, leur position relative seroit la même que celle qu'il prendroit en vertu des attractions & des forces capables de faire parcourir les lignes AZ, $A'Z'$, auxquelles ils sont soumis aux points A & A' ; puisque les lignes AZ & $A'Z'$ sont respectivement égales & parallèles aux lignes az, $a'z'$, & que les attractions des mobiles aux points A & A' sont aussi des forces égales & parallèles à leurs attractions, aux points a & a'.

La même démonstration auroit lieu pour le troisième instant, pour le quatrième instant, & en général pour un instant quelconque.

Du reste, on peut généraliser la proposition qui fait l'objet de la présente remarque, & reconnoître que si plusieurs corps, lancés comme on voudra dans l'espace, viennent à recevoir de nouvelles vîtesses égales & parallèles dans le même sens, leur position respective sera la même à chaque instant, que s'ils ne les avoient pas reçues.

On conçoit en effet, que si les mobiles n'avoient que ces vîtesses égales & parallèles, ils conserveroient constamment la même position respective. Donc ces vîtesses n'influent en rien dans le changement de cette position.

CCLXVI.

COROLLAIRE I. *Si deux mobiles* M & M′ (Fig. 126.) *lancés dans le même plan, avec des vîtesses & suivant des directions quelconques, s'attirent mutuellement avec des forces proportionnelles aux masses attirantes divisées par les quarrés des distances, chacun de ces mobiles sera toujours porté vers le centre de gravité, par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés de ses distances à ce point.*

Car supposons que les mobiles placés en M & en M' aient leur centre de gravité en G, & que parvenus en m & m', ils aient ce centre en g: on aura $M + M' : M' :: MM' : GM :: mm' : gm$, d'où l'on tire $MM' : mm' :: GM : gm$. Or, en nommant F & f les forces attractives auxquelles le mobile M est soumis dans les points M & m de sa trajectoire, on a, par l'hypothèse, $F : f :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M'}{\overline{mm'}^2}$. Donc en substituant, au lieu du rapport de MM' à mm', celui de GM à gm, on aura $F : f :: \frac{M'}{\overline{GM}^2} : \frac{M'}{\overline{gm}^2}$; ce qui fait voir que les forces qui portent le mobile M vers le centre de gravité, sont toujours en raison inverse des quarrés de ses distances à ce point. On démontreroit la même chose du mobile M' en faisant un semblable raisonnement.

En général, *si les attractions des mobiles étoient proportionnelles aux masses attirantes, divisées ou multipliées par une puissance quelconque des distances, les forces qui porteroient l'un des mobiles vers le centre de gravité, seroit comme la masse de l'autre mobile, divisée ou multipliée par la puissances des distances à ce centre, énoncée dans la loi des attractions.* Pour le démontrer, il faudroit seulement dans la proportion $F : f :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M'}{\overline{mm'}^2}$, diviser ou multiplier M' par la puissance donnée des distances MM', mm', au lieu de le diviser comme nous avons fait, par le quarré de ces lignes.

CCLXVII.

COROLLAIRE II. *En supposant toujours les attractions en raison directe des masses attirantes & en raison inverse des quarrés des distances, si les deux mobiles* M & M' (Fig. 127.) *sont lancés dans le même plan, de manière que leur centre de gravité* G *demeure en repos, ils décriront des sections coniques semblables* Mm, M'm', *qui auront pour foyer commun ce centre de gravité.*

Car 1° on a démontré (*Num.* CCXXVII.) que la trajectoire décrite par un mobile porté constamment vers un même point par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances à ce point, étoit toujours une section conique. 2° Si par

le centre de gravité on tire les lignes MM', mm' jusqu'à la rencontre des deux trajectoires, quand le mobile M sera en m, le mobile M' sera en m', & l'on aura $M : M' :: GM' : GM :: Gm' : Gm$. Donc les points correspondants quelconques m & m' seront semblablement placés par rapport aux lignes GM & GM'; ce qui ne peut arriver, à moins que les courbes ne soient semblables.

Si le centre de gravité G (Fig. 128.) *se meut uniformément avec une vîtesse* V, *les mobiles décriront aussi des sections coniques semblables, dont tous les points seroient transportés parallèlement à la direction du centre de gravité, avec la même vîtesse* V.

Car supposons que les mobiles lancés aux points M & M' arrivent après un tems quelconque T, aux points m & m' de leurs trajectoires, & que le centre de gravité décrive pendant le même tems l'espace Gg. La position relative des deux mobiles sera déterminée par la ligne mm', & l'on aura $M + M' : M' :: mm' : gm$. Si l'on avoit donné en M & en M' à chacun des mobiles une vîtesse V égale, mais opposée à celle du centre de gravité, ce centre seroit resté en repos, & les mobiles décrivant des sections coniques semblables, seroient arrivés après le tems T à quelques points n, n', de ces courbes. La ligne nn' qui détermineroit leur position respective, seroit égale & parallèle à la

ligne mm' (*Num.* CCLXV.). Et l'on aura $M+M' : M' :: nn' : Gn$. Les trois premiers termes de cette proportion étant égaux aux trois premiers termes de la précédente, on peut conclure que $Gn=gm$: donc aussi $nm=Gg=n'm'$. Or il est évident que si tous les points des léviers uniques MX, $M'X'$ avançoient parallèlement à la direction du centre de gravité avec la vitesse V, les points n & n' arriveroient après le tems T aux points m & m'. Donc ces points m & m' où arrivent les mobiles après un tems quelconque T, ne sont autre chose que des points de léviers uniques mobiles, & dont toutes les parties avancent parallèlement à Gg avec la même vitesse que le centre de gravité.

SECTION X.

Du Choc des Corps.

CCLXVIII.

LE *choc* est l'action par laquelle un corps en mouvement en rencontre un autre & tend à le pousser. Le choc peut être *direct* ou *oblique*. Il est direct, lorsque l'impulsion se fait suivant une ligne perpendiculaire à l'endroit du contact, & qui de plus passe par le centre de gravité des deux corps qui se rencontrent. Le choc est oblique, lorsque l'impulsion se fait suivant une ligne oblique à l'endroit du con-

tact, ou suivant une ligne perpendiculaire à cet endroit, mais qui ne passe pas par le centre de gravité des deux corps.

CCLXIX.

TOUS les solides que nous connoissons, s'applatissent plus ou moins dans le choc; & dès que la force qui les avoit comprimés, cesse d'agir, ils reprennent leur première figure d'une manière plus ou moins parfaite. C'est la force avec laquelle ils se rétablissent, qu'on nomme *élasticité* ou *ressort* des corps. Quoiqu'il n'y ait dans la nature ni corps solides *parfaitement durs*, c'est-à-dire, absolument incompressibles; ni corps *parfaitement moux*, qui après avoir été comprimés dans le choc, restent dans l'état d'applatissement où la compression les a réduits, sans faire effort pour reprendre leur première figure; ni corps *parfaitement élastiques* ou à *ressort parfait*, qui se rétablissent entièrement après la compression, par les mêmes degrés par lesquels ils avoient été applatis; nous commencerons cependant par les considérer comme s'ils avoient une dureté, ou une mollesse, ou une élasticité parfaite. Nous déterminerons ensuite plus aisément les loix du choc des corps à ressort imparfait.

CCLXX.

QUAND deux corps se rencontrent, il peut arriver qu'ils aillent avant le choc dans le même sens,

qu'ils se meuvent en sens contraire. Dans le pre-
ier cas, on nomme corps *choquant* celui qui pour-
iivant l'autre a le plus de vîtesse, & corps *choqué*
lui qui fuit avec une moindre vîtesse. Dans le
:ond cas, on nomme corps choquant celui qui a
plus de force, & corps choqué celui qui en a le
ins. On appelle vîtesses *primitives* celles qu'ont
corps avant le choc.

Choc des Corps parfaitement durs, & de celui des Corps parfaitement moux.

CCLXXI.

ROBLÈME I. *Connoissant les masses & les vîtesses mitives de deux corps parfaitement durs, dont ı va frapper l'autre qui fuit directement devant , trouver leur vîtesse après le choc.*

SOLUTION. Soient respectivement M & m les sses du corps choquant & du corps choqué, V v leurs vîtesses primitives. 1° Il est évident après le choc les deux corps doivent se mouvoir :c la même vîtesse & aller de compagnie. Car si ı vouloit supposer que le corps choqué eût ins de vîtesse que le corps choquant, celui-ci ıtinueroit d'agir sur lui, ce qui est contre l'hy- thèse : mais dès qu'on supposera qu'ils ont la me vîtesse, il n'y aura plus d'action de l'un sur itre.

2° Il est évident que ces deux corps allant de

compagnie après le choc, auront la même vîtesse que leur centre commun de gravité. Or la vîtesse du centre de gravité avant le choc est $x = \frac{MV+mv}{M+m}$ (*Num.* CCLVII.), & cette vîtesse ne change point par le choc des corps (*Num.* CCLXI.). Donc la vîtesse commune des deux corps après le choc sera aussi $x = \frac{MV+mv}{M+m}$.

CCLXXII.

COROLLAIRE I. *La vîtesse que le corps choquant perd dans la collision, est égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choqué, & divisée par la somme des masses. La vîtesse que le corps choqué gagne dans la collision, est égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choquant, & divisée par la somme des masses.*

Car en admettant toutes les dénominations données dans le problème précédent, la vîtesse que le corps choquant perd dans la collision est égale à la vîtesse V qu'il avoit avant le choc, moins la vîtesse x qu'il conserve après le choc: or $V-x$ $= V - \frac{MV-mv}{M+m} = \frac{mV-mv}{M+m} = \frac{m(V-v)}{M+m}$.

De même la vîtesse que gagne le corps choqué est égale à la vîtesse x qu'il a après la percussion, moins la vîtesse v qu'il avoit déja. Or $x - v$

$$\frac{V+mv}{M+m}-v=\frac{MV-Mv}{M+m}=\frac{M(V-v)}{M+m}.$$

CCLXXIII.

ROLLAIRE II. *La quantité de mouvement e par le corps choquant dans la collision, ale à la quantité de mouvement gagnée par ›s choqué.*

pour avoir la quantité de mouvement perdue corps choquant, il faut multiplier la vîtesse erd, par sa masse, & l'on aura $\frac{M\times m(V-v)}{M+m}$. ıême pour avoir la quantité de mouvement e par le corps choqué, il faut multiplier la : qu'il gagne, par sa masse, & l'on trouvera $\frac{(V-v)}{+m}$. Or $\frac{M\times m(V-v)}{M+m}=\frac{m\times M(V-v)}{M+m}$.

le mouvement perdu par le corps choquant al au mouvement gagné par le corps choqué. ı voit par là, que le choc détruit autant de ement dans le corps choquant, qu'il en fait : dans le corps choqué. C'est ce que les Phy- s expriment d'une autre manière, en disant, lans le choc, *la réaction est égale à l'action.* il faut observer qu'ils emploient quelquefois dernière proposition dans un sens très-diffé- pour signifier que dans le choc des corps par- nent élastiques, la force qui fait reprendre à

ces corps leur première figure, après la compression, est égale à celle qui l'avoit changée.

CCLXXIV.

COROLLAIRE III. *Les quantités de mouvement que les deux corps, choquant & choqué, ont après la collision, sont proportionnelles à leurs masses.*

Car en appelant toujours M & m leurs masses, & x la vîtesse commune après le choc, les quantités de mouvement qu'ils auront après le choc seront Mx, mx: or il est évident que $Mx : mx :: M : m$.

CCLXXV.

COROLLAIRE IV. Quand la vîtesse v du corps choqué est zéro, c'est-à-dire, quand ce corps est en repos, le terme mv devient zéro dans la formule $x = \frac{MV + mv}{M + m}$, & cette formule se réduit à $x = \frac{MV}{M+m}$. Donc en ce cas *la vîtesse commune après le choc, est égale à la quantité primitive du mouvement du corps choquant, divisée par la somme des masses.*

CCLXXVI.

PROBLÈME II. *Supposons à présent que les deux corps parfaitement durs qui doivent se choquer directement, viennent à la rencontre l'un de l'autre: on demande leur vîtesse après le choc.*

SOLUTION. Que les masses du corps choquant

du corps choqué ſoient toujours reſpectivement M & m : que leurs vîteſſes primitives ſoient V & v.

1° Si l'on ſuppoſoit qu'après le choc, la vîteſſe du corps choqué fût moindre que celle du corps choquant, celui-ci continueroit d'agir ſur le premier, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Mais ſi l'on ſuppoſe qu'ils aient l'un & l'autre la même vîteſſe, il n'y aura plus d'action de l'un ſur l'autre. Donc après le choc ils iront de compagnie, & par conſéquent ils auront la même vîteſſe que leur centre commun de gravité.

2° La vîteſſe du centre commun de gravité eſt la même avant qu'après le choc (*Num.* CCLXI.). Or, pour avoir cette vîteſſe avant le choc, il faut (*Num.* CCLVII.) diviſer la différence des mouvements par la ſomme des maſſes; c'eſt-à-dire, qu'en nommant x cette vîteſſe, on a $x = \frac{MV - mv}{M + m}$.

Donc la vîteſſe du centre de gravité après le choc, ou la vîteſſe commune des deux corps, ſera auſſi

$$x = \frac{MV - mv}{M + m}.$$

CCLXXVII.

REMARQUE. Lorſque les deux corps qui doivent ſe choquer, vont dans le même ſens, leurs vîteſſes primitives V & v ſont regardées l'une & l'autre comme *poſitives* : mais lorſqu'avant le choc ils ſe meuvent en ſens contraires, on regarde

comme *positive* la vîtesse V du corps choquant, & par conséquent on doit traiter comme *négative* la vîtesse opposée du corps choqué, & supposer qu'elle est $-v$.

CCLXXVIII.

COROLLAIRE I. *Quand deux corps durs, mus en sens contraires, se choquent directement,* 1° *la vîtesse perdue par le corps choquant est égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choqué, & divisée par la somme des masses. La vîtesse gagnée par le corps choqué, est aussi égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choquant & divisée par la somme des masses.*

Car la vîtesse que perd le corps choquant est

$$V-x=V-\frac{MV+mv}{M+m}=\frac{mV+mv}{M+m}=\frac{m(V+v)}{M+m}.$$

Or $V+v$ est la différence des vîtesses primitives $V, -v$; & m est la masse du corps choqué.

De même, la vîtesse que le corps choqué gagne suivant la direction du corps choquant, est $v+x$. Car il acquiert d'abord la vîtesse v qui détruit la vîtesse $-v$ qu'il avoit avant le choc: il acquiert de plus la vîtesse x, avec laquelle il se meut après le choc suivant la direction du corps choquant. Donc après le choc, la vîtesse qu'il a gagnée suivant la direction du corps choquant, est $v+x$

$=v$

$$= v + \frac{MV - mv}{M + m} = \frac{MV + Mv}{M + m} = \frac{M(V + v)}{M + m}.$$

2° *La quantité de mouvement que perd le corps choquant, est égale à celle que le corps choqué gagne suivant la direction du choquant.*

En effet, pour avoir la quantité de mouvement perdue par le corps choquant, il faut multiplier la vîtesse qu'il perd dans la collision, par sa masse, & l'on trouvera $\frac{M \times m(V + v)}{M + m}$. De même, pour avoir la quantité de mouvement gagnée par le corps choqué suivant la direction du corps choquant, il faut multiplier la vîtesse qu'il gagne en ce sens, par sa masse, & l'on aura $\frac{m \times M(V + v)}{M + m}$. Or il est évident que $\frac{M \times m(V + v)}{M + m} = \frac{m \times M(V + v)}{M + m}$.

On peut donc dire que dans le choc des corps durs, mus en sens contraires, comme dans celui des corps qui vont dans le même sens, *la réaction est toujours égale à l'action.*

CCLXXIX.

Corollaire. II. La solution des deux problèmes précédents (*Num.* CCLXXI & CCLXXVI.) nous fournit la règle suivante pour déterminer, dans tous les cas la vîtesse commune des corps incompressibles après le choc. *Si les mobiles vont dans le même sens avant de se choquer, ajoutez*

ensemble leurs quantités de mouvement, & divisez la somme par la somme des masses, le quotient donnera la vîtesse commune. Si les mobiles se meuvent en sens contraires avant le choc, prenez séparément la quantité de mouvement de l'un & de l'autre; ôtez la plus petite de la plus grande, & divisez le reste par la somme des masses : vous aurez pour quotient la vîtesse commune.

Par exemple, si un mobile dont la masse est de 3 onces & la vîtesse de 9 pieds par seconde, en rencontre un autre dont la masse est de 6 onces, & qui fuit devant lui avec une vîtesse de 2 pieds par seconde; ajoutez ensemble les quantités de mouvement 27 & 12 : divisez ensuite la somme 39 par la somme des masses 3 + 6 ou 9 : le quotient $\frac{39}{9} = 4 + \frac{1}{3}$ exprimera la vîtesse commune après le choc.

Si les deux mêmes corps viennent se choquer en sens contraire, avec les mêmes vîtesses primitives, vous trouverez la vîtesse commune en retranchant la quantité de mouvement 12 du second, de la quantité de mouvement 27 du premier, & en divisant le reste 15 par 9, ce qui donnera pour quotient $1 + \frac{2}{3}$.

Enfin, si le corps qui a 6 onces de masse est en repos, divisez le mouvement de l'autre, qui est 27, par la somme des masses qui est 9. Le quotient 3 donnera la vîtesse commune après le choc.

CCLXXX.

REMARQUE I. Si les corps qui se choquent, étoient parfaitement mous, l'action de l'un sur l'autre ne cesseroit qu'au moment qu'ils auroient la même vîtesse : donc après le choc ils iroient de compagnie, avec une vîtesse égale à celle de leur centre commun de gravité ; & puisque la collision ne change rien à la vîtesse du centre de gravité, leur vîtesse après le choc seroit égale à la somme ou à la différence des mouvements primitifs (selon que les corps iroient d'un même ou de différents sens) divisée par la somme des masses

On voit par là, que les corps parfaitement mous suivent, dans le choc, les mêmes loix que les corps incompressibles. Il faut seulement observer que, dans le choc des corps durs, le mouvement est censé se communiquer dans un instant indivisible ; au lieu que dans le choc des corps mous, la communication du mouvement se fait dans un tems fini plus ou moins long, suivant que les corps ont plus ou moins de compressibilité.

CCLXXXI.

REMARQUE. II. Un corps ne pouvant de lui-même changer son état, il faut nécessairement l'action d'une force étrangère, pour augmenter ou pour diminuer son mouvement. Il suit même des principes fondamentaux de la Méchanique, & des

théories démontrées jusqu'à présent, que pour enlever à un corps une certaine quantité de mouvement, il faut employer autant de force, que pour donner la même quantité de mouvement à un autre corps. Donc, puisque la collision fait perdre au corps choquant autant de mouvement qu'elle en fait gagner au corps choqué, des forces égales sont employées à changer les états primitifs de ces corps, & à les applatir s'ils sont compressibles.

Du Choc des Corps élastiques.

CCLXXXII.

THÉOREME. *Dans le choc des corps à ressort parfait, le corps choquant perd toujours une vîtesse double de celle qu'il perdroit, & le corps choqué gagne toujours une vîtesse double de celle qu'il gagneroit, s'ils étoient sans ressort.*

Pour le démontrer, il faut considérer les circonstances du choc des corps à ressort parfait. Quand deux corps élastiques se rencontrent, ils se compriment de plus en plus, jusqu'au moment où les deux centres & le point de contact ont une égale vîtesse pour avancer dans le même sens. Ils s'applatissent ainsi par degrés, non seulement dans l'endroit où ils se touchent, mais aussi dans la partie opposée; parce que les parties les plus éloignées du contact s'avançant plus promptement dans l'un & plus lentement dans l'autre, jusqu'à ce que la compression soit finie,

refoulent d'autant les parties intermédiaires. Mais la compreſſion une fois achevée, les parties des deux corps voiſines du contact, s'appuient les unes contre les autres pendant que le contact eſt tranſporté, & alors tout le débandement du reſſort s'exerce vers les côtés oppoſés au point de contact, enſorte que les centres ſont entraînés en ſens contraires avec tout l'effort, avec lequel la reſtitution tend à ſe faire. Or, puiſqu'on ſuppoſe les corps parfaitement élaſtiques, ils doivent ſe rétablir dans leur première figure avec une force égale à celle qui les a comprimés : cette force repouſſera donc en arrière le corps choquant, en lui communiquant une vîteſſe égale à celle qu'il a perdue par la compreſſion, & en même tems elle imprimera au corps choqué autant de vîteſſe que la compreſſion lui en a déjà communiqué. Donc le choquant perdra & le choqué gagnera la moitié plus de vîteſſe, que le premier n'en perdroit & que le ſecond n'en gagneroit, s'ils étoient ſans reſſort.

CCLXXXIII.

REMARQUE. Dans le choc des corps élaſtiques, non ſeulement le rétabliſſement de figure ſuit la compreſſion, mais ce rétabliſſement eſt lui-même ſuivi d'un nouveau changement de figure tout contraire au premier. A celui-ci, il en ſuccède un autre qui ramène à la figure qu'ils avoient lors de

la compreſſion, & ainſi de ſuite. Enſorte que les parties de chaque corps ont à l'égard de leur centre de gravité, un mouvement de vibration ou d'allée & de retour; parce que les parties tendent à revenir à leur première figure par un mouvement qui va en s'accélérant, & qui les fait paſſer au-delà. Ces changements alternatifs de figure ſont ſenſibles dans pluſieurs corps élaſtiques, lorſqu'on les frappe; principalement dans les corps ſonores. Mais quoique deux corps qui ſe choquent, ne s'arrêtent pas à leur première figure, dès qu'ils y ſont arrivés en ſe rétabliſſant, néanmoins ils doivent ſe quitter à ce terme, & par conſéquent ils n'ont plus d'action l'un ſur l'autre.

En effet, pour que les corps comprimés reviennent à leur première figure, il faut un tems fini, que l'on peut regarder comme compoſé d'une infinité d'inſtans égaux & infiniment petits. Les corps ſe dilatent moins au premier de ces inſtants qu'au ſecond, moins au ſecond qu'au troiſième, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier; de manière que l'inſtant où ils arrivent à leur première figure, eſt celui où la dilatation eſt la plus grande. Elle diminue enſuite de plus en plus, quand les corps ſouffrent un changement de figure contraire à celui qu'ils avoient reçu de la compreſſion. Or ces circonſtances ne peuvent pas avoir lieu, à moins que les deux mobiles ne ſe ſéparent l'un de l'autre, au moment où

ils arrivent à leur première figure en se rétablissant. Car si pendant l'instant qui a précédé ce retour à la figure primitive, les parties comprises entre le contact & les centres du choquant & du choqué, se sont dilatées respectivement des quantités d & d', les centres se seront éloignés, pendant cet instant, d'une quantité $d+d'$. Ces centres s'éloigneront donc encore l'un de l'autre, d'une quantité $d+d'$, pendant l'instant suivant; & même il est évident qu'ils s'éloigneroient davantage, s'ils continuoient à se presser au point de contact. Donc les corps ne demeureront point contigus, à moins qu'ils ne se dilatent l'un vers l'autre d'une quantité $d+d'$. Or c'est ce qu'on ne peut pas supposer, puisqu'ils doivent se moins dilater dans cet instant que dans le précédent. Ils se quitteront donc & n'agiront plus l'un sur l'autre.

On peut ajouter que les vibrations qui auront encore lieu dans chacun des deux corps, après leur séparation, ne peuvent influer en rien sur les vîtesses de leurs centres de gravité. Car ces vibrations ne continuant plus que par l'action des parties d'un même corps les unes sur les autres, cette action ne peut produire aucun changement dans l'état du centre de gravité de ce corps (*Num.* CCLXI.).

CCLXXXIV.

Corollaire. *Il suit du théorème précédent*,

que deux corps à ressort qui se rencontrent, n'ont jamais la même vîtesse après le choc.

Car ces corps iroient de compagnie, s'ils ne reprenoient pas leur première figure après avoir été comprimés. Mais la réaction doit nécessairement augmenter la vîtesse du corps choqué & diminuer celle du corps choquant. Il n'est donc pas possible que les deux corps aient la même vîtesse après le choc.

CCLXXXV.

PROBLÈME I. *Connoissant les vîtesses primitives de deux corps à ressort parfait, qui se choquent directement, trouver les vîtesses qu'ils auront l'un & l'autre après le choc.*

SOLUTION. Pour résoudre ce problème, cherchez la vîtesse commune qu'auroient les corps après le choc, s'ils étoient sans ressort; alors si du double de cette vîtesse, vous ôtez la vîtesse primitive de chacun, vous aurez les vîtesses de chacun après le choc. Sur quoi il faut observer, que si les corps vont en sens contraires avant le choc, on doit donner le signe — à la vîtesse primitive du corps choqué, & la considérer comme négative par rapport à celle du corps choquant.

Cette règle se déduit très-simplement du théorème démontré (*Num.* CCLXXXII.). Car soient V & v les vîtesses primitives du corps choquant & du corps choqué: en nommant aussi x la vîtesse

commune qu'ils auroient après le choc, s'ils étoient fans reffort, le corps choquant perdroit dans la compreffion, la vîteffe $V-x$, & ne conferveroit que la vîteffe x. Donc, puifqu'il doit perdre autant de vîteffe par la réaction qu'il en a perdu par la compreffion, il faudra encore ôter $V-x$ de la vîteffe x, qui lui refte après la compreffion, & la différence $2x-V$ donnera fa vîteffe après le choc. Donc la vîteffe du corps choquant fe trouve en ôtant fa vîteffe primitive, du double de celle qu'il auroit, fi les corps étoient fans reffort.

Quant au corps choqué, il peut arriver qu'il fe meuve, avant le choc, fuivant la direction du corps choquant, ou qu'il vienne en fens oppofé.

Dans le premier cas, il acquiert en vertu de la compreffion, la vîteffe $x-v$, & s'il n'y avoit point d'élafticité, fa vîteffe après le choc feroit x.

Mais il doit encore gagner par la réaction autant de vîteffe qu'il en a gagné par la compreffion. Donc pour avoir fa vîteffe, il faut ajouter $x-v$ à x, ce qui donnera $2x-v$. Ainfi, pour avoir fa vîteffe après le choc, il faut ôter fa vîteffe primitive, du double de celle qu'il auroit, fi les corps étoient fans reffort.

Dans le fecond cas, le corps choqué gagne dans la compreffion la vîteffe $x+v$, & fi les corps n'étoient pas élaftiques, fa vîteffe après le choc feroit x, par la fuppofition. Mais la réaction devant lui

donner encore autant de vîtesse qu'il en a déjà gagné par la compression, il faut ajouter à x une vîtesse $x+v$, ce qui donnera $2x+v$ pour la vîtesse qu'il aura réellement après le choc. Il faut donc ôter sa vîtesse primitive $-v$, de $2x$, double de la vîtesse qu'il auroit, si les corps n'étoient pas élastiques.

Appliquons à quelques exemples la règle que nous venons de démontrer, & supposons d'abord que les deux corps aillent dans le même sens. L'un a 6 onces de masse & une vîtesse de 10 pieds par seconde; l'autre qui doit être choqué, a 2 onces de masse & 2 pieds de vîtesse par seconde. La vîtesse qu'ils auroient après le choc, s'ils étoient sans ressort, seroit 8; c'est-à-dire, qu'ils iroient de compagnie en parcourant chacun 8 pieds par seconde, s'ils n'étoient pas élastiques. Si de 16, double de cette vîtesse, j'ôte les vîtesses primitives 10 & 2, j'aurai 6 & 14 pour les vîtesses du choquant & du choqué, après la collision.

Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, avec les mêmes masses & les mêmes vîtesses que dans ce premier exemple; alors leur vîtesse comme corps durs, après le choc, sera 7. Si du double de cette quantité, c'est-à-dire, de 14, on retranche la vîtesse 10, que le choquant avoit avant la collision, on aura 4 pour sa vîtesse après le choc. De même, si de 14 on soustrait la vîtesse primitive

—2 du corps choqué, on trouvera 16 pour sa vîtesse après le choc.

Supposons encore qu'un corps dont la masse est de 1 once & la vîtesse de 8 pieds par seconde, en choque un autre dont la masse soit de 5 onces, & qui fuie devant lui avec une vîtesse de 2 pieds par seconde. Si ces corps n'étoient pas élastiques, la vîtesse commune après la collision seroit 3. De 6, double de cette vîtesse, ôtons les vîtesses primitives : nous trouverons 4 pour la vîtesse du corps choqué, après la collision, & —2 pour la vîtesse du corps choquant : ce qui nous apprend que celui-ci, après le choc, reviendra en arrière, avec une vîtesse de 2 pieds par seconde. Cela ne doit point surprendre : car il perd une vîtesse = 5 dans la compression, & ne conserve qu'une vîtesse = 3, pour aller en avant. La réaction lui communiquant ensuite une vîtesse = 5 pour revenir en arrière, il est évident qu'il doit reculer avec une vîtesse = 2.

On déterminera de même les vîtesses du corps choquant & du corps choqué, après la collision, dans tout autre cas particulier.

Du reste, on peut trouver aisément des formules, où ces vîtesses ne soient exprimées que par les vîtesses primitives & par les masses des corps. Pour cela, nommons y & z les vîtesses que doivent avoir respectivement le corps choquant & le corps choqué, après le choc.

1° S'ils vont dans le même ſens avant de ſe rencontrer, nous aurons, $y = 2x - V$, & $z = 2x - v$. Or dans ce cas (*Num.* CCLXXI.), $x = \frac{MV + mv}{M + m}$. Donc on aura

$$y = \frac{2MV + 2mv}{M + m} - V = \frac{MV - mV + 2mv}{M + m};$$

$$\& \; z = \frac{2MV + 2mv}{M + m} - v = \frac{2MV + mv - Mv}{M + m}.$$

2° Si les deux corps vont en ſens oppoſés, avant de ſe rencontrer, on aura $y = 2x - V$, & $z = 2x + v$. Or, comme nous l'avons démontré ci-deſſus (*Num.* CCLXXVI.), on aura $x = \frac{MV - mv}{M + m}$. Subſtituant cette valeur, on trouvera

$$y = \frac{2MV - 2mv}{M + m} - V = \frac{MV - mV - 2mv}{M + m},$$

$$\& \; z = \frac{2MV - 2mv}{M + m} + v = \frac{2MV + Mv - mv}{M + m}.$$

CCLXXXVI.

COROLLAIRE. *Dans le choc des corps parfaitement élaſtiques, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, eſt la même avant qu'après le choc.*

En effet, ſoient M & V la maſſe & la vîteſſe primitive du corps choquant, m & v la maſſe & la vîteſſe primitive du corps choqué, v ſe prenant négativement ſi les corps ſe choquent en ſens con-

raires. La ſomme des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, avant le choc, ſera MV^2+mv^2. Nous allons démontrer qu'on trouvera la même quantité, en multipliant les maſſes par les quarrés des vîteſſes particulières qui auront lieu après le choc.

1° Si les deux mobiles en vertu des vîteſſes primitives vont dans le même ſens, & que l'on appelle x la vîteſſe commune qu'ils prendroient en ſe choquant, comme corps durs, les produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, après la réaction, ſeroient $M(2x-V)^2+m(2x-v)^2=4Mx^2 -4MVx+MV^2+4mx^2-4mvx+mv^2 =MV^2+mv^2+4x(Mx+mx-MV-mv)$. Or cette quantité vaut MV^2+mv^2, puiſque le facteur $Mx+mx-MV-mv$, ou $(M+m)x -MV-mv=0$, comme on le reconnoît en ſubſtituant à la place de x ſa valeur $\frac{MV+mv}{M+m}$, ce qui donne $\frac{(M+m)(MV+mv)}{M+m}-MV-mv$; quantité qui eſt évidemment zéro.

2° Si les deux mobiles viennent à la rencontre l'un de l'autre, les produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, après le choc, feront $M(2x-V)^2 +m(2x+v)^2=4Mx^2-4MVx+MV^2 +4mx^2+4mvx+mv^2=MV^2+mv^2+4x (Mx+mx-MV+mv)$. Or cette quantité ſe réduit à MV^2+mv^2. Car le facteur $Mx+mx$

$-MV+mv$, ou $(M+m)x-MV+mv=0$, comme on le voit aisément en mettant au lieu de x sa valeur $\frac{MV-mv}{M+m}$, ce qui donne

$$\frac{(M+m)(MV-mv)}{M+m}-MV+mv=0.$$

CCLXXXVII.

Problème II. *Connoissant le ressort & les vîtesses primitives de deux corps imparfaitement élastiques, trouver leurs vîtesses après le choc.*

Solution. Quand les corps sont imparfaitement élastiques, la force avec laquelle ils se rétablissent après la compression, n'est qu'une partie de celle avec laquelle ils se rétabliroient, s'ils étoient à ressort parfait. Nous supposerons que la première de ces forces soit à la seconde, comme p est à 1; p étant une quantité connue, moindre que l'unité, & qui peut varier à l'infini, suivant que les corps ont plus ou moins de ressort.

Cela posé, on déterminera la vîtesse que le corps choquant perdroit & celle que le choqué gagneroit par la réaction, s'ils étoient parfaitement élastiques. Ensuite on fera les deux proportions suivantes.

1 *est à* p, *comme la vîtesse que le choquant perdroit par la réaction, s'il étoit parfaitement élastique, est à celle qu'il doit perdre réellement.*

1 *est à* p, *comme la vîtesse que le choqué ga-*

gneroit par la réaction, s'il étoit parfaitement élastique, est à celle qu'il gagnera réellement.

On trouvera ainsi la vîtesse que le choquant doit perdre & celle que le choqué doit gagner par la réaction. On retranchera la première, de la vîtesse commune que les corps auroient, après le choc, s'ils étoient sans ressort; on ajoutera la seconde à cette vîtesse commune. On aura pour différence la vîtesse du corps choquant, & pour somme la vîtesse du corps choqué, après la réaction.

Supposons, par exemple, deux corps mus dans le même sens avant le choc, & dont le ressort soit $p=\frac{3}{4}$. Que le choquant ait une masse de 3 onces & une vîtesse de 8 pieds par seconde: que la masse du choqué soit de deux onces, & sa vîtesse de 3 pieds par seconde. Je vois que s'ils étoient sans ressort, la vîtesse commune après le choc, seroit de 6 pieds par seconde, & que par conséquent le choquant perdroit 2 de vîtesse, tandis que le choqué en gagneroit 3, dans la compression. Si leur ressort étoit parfait, le premier perdroit encore 2 de vîtesse, par la réaction, tandis que le second en gagneroit 3: mais comme ils sont à ressort imparfait, je dis, 1 est à $\frac{3}{4}$, comme 2 est à la vîtesse que le choquant doit perdre par la réaction. Je trouve que cette vîtesse est $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, que je retranche de 6. Le reste $6-\frac{3}{2}$ ou $4\frac{1}{2}$ sera la vîtesse du choquant, après la collision. Je fais de même la proportion,

1 est à $\frac{3}{4}$, comme 3 est à la vîtesse que le c
doit gagner par la réaction. Cette vîtesse est
j'ajoute à la vîtesse 6. La somme 8 $\frac{1}{4}$ marq
vîtesse du corps choqué, après le choc.

CCLXXXVIII.

Remarque I. Si la vîtesse que la ré donne au corps choqué, est la moitié, les deu ou les trois quarts, &c. de celle que la compr lui imprime suivant la direction du corps cho c'est une preuve que la force élastique de ce n'est que la moitié, les deux tiers ou les quarts, &c. de ce qu'elle seroit, si le ressor parfait; puisqu'en supposant les corps parfait élastiques, le choqué recevroit autant de v par la réaction que par la compression (. CCLXXXII.). Donc en représentant, comm le problème précédent, le ressort parfait par l' & le ressort imparfait du corps par un nom moindre que l'unité, on aura la proportion sui 1 *est à* p, *comme la vîtesse que la compression au corps choqué suivant la direction du choq est à celle que la réaction lui communique.* O donc trouver la valeur de p, ou le degré d' cité d'un corps, par une expérience immédiate faisant choquer par un autre corps de même e & divisant la vîtesse qu'il recevra dans la réa par celle que la compression lui aura commun

Qu'un corps en repos, par exemple, ſoit choqué par un corps égal & de même eſpèce, qui ait une vîteſſe de 8 pieds par ſeconde. Je vois que le choqué doit recevoir dans la compreſſion une vîteſſe de 4 pieds. S'il a une vîteſſe de 6 pieds après le choc, j'en conclurai qu'il a reçu 2 de vîteſſe par la réaction, & qu'on a $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Telle eſt la méthode qu'on peut employer pour déterminer le reſſort de chaque eſpèce de corps en particulier. Elle ſuppoſe évidemment que dans chaque corps, la réaction ſoit en raiſon conſtante avec la compreſſion, quelle que ſoit la force du choc; c'eſt-à-dire, que ſi la réaction donne au corps choqué une vîteſſe de 2 pieds, pendant que la compreſſion lui communique une vîteſſe de 4 pieds, la réaction donnera auſſi au même corps des vîteſſes de 3, 4, 10 pieds, &c., pendant que la compreſſion lui communiquera des vîteſſes de 6, 8, 20 pieds, &c.; ce qui n'eſt peut-être pas exactement vrai.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail ſur les loix du choc direct des corps: mais en finiſſant cette ſection, nous dirons un mot du choc oblique & du centre de percuſſion, dans les remarques ſuivantes.

CCLXXXIX.

REMARQUE II. Suppoſons deux globes M & m (*Fig.* 129.), qui partant des points M & m

ſe meuvent dans le même plan, ſuivant les lignes *MA*, *mA*, & doivent ſe choquer obliquement. Que la vîteſſe *V* du premier ſoit capable de lui faire parcourir la ligne *MC*, pendant que la vîteſſe *v* du ſecond lui fera parcourir la ligne *mA*. Il s'agit de trouver l'endroit où ces globes ſe rencontreront, & de déterminer enſuite leurs vîteſſes & leurs directions après le choc.

1° J'achève le parallélogramme *MmAB*, en menant *MB* parallèle à *mA*, & *AB* parallèle à *Mm*. Je joins les points *B* & *C* par la ligne *BC*. Enſuite du point *A* pris pour centre, avec un rayon *AD* égal à la ſomme des rayons des globes propoſés, je décris l'arc *ED*, qui coupe la ligne *CB* aux deux points *E* & *D*. Par le dernier de ces points, qui eſt le moins éloigné de *B*, je mène la ligne *DF* parallèle à *MB*. Du point *F* où elle coupe *MA*, je tire *FG* parallèle à *AD*. Je dis que les deux globes arriveront en même tems aux points *F* & *G* de leurs directions, & qu'alors ils ſe rencontreront.

En effet, les triangles ſemblables *MCB*, *FCD*, donnent la proportion $MC : MB :: FC : FD$, ou $MC : mA :: FC : GA$; puiſqu'on a $MB = mA$, & $FD = GA$. Or, *MC* & *mA* devant être parcourues dans le même tems, il en ſera de même des lignes *FC* & *GA*, & par conſéquent des lignes *MF* & *mG*. Donc les deux globes arriveront en même tems aux points *F* & *G*; & comme la ligne

FG eſt égale à la ſomme de leurs rayons, il eſt évident qu'alors ils ſe toucheront en un point *H*, & qu'ils commenceront à agir l'un ſur l'autre.

2° Dans le triangle *MCB* on connoît par l'hypothèſe, les deux côtés *MC*, *MB*, & l'angle qu'ils comprennent. Donc on trouvera le côté *CB* & les deux angles adjacents. Alors dans le triangle *ACD* on connoîtra non ſeulement les deux côtés *AC*, *AD*, mais auſſi l'angle *ACD*, ſupplément de *MCB*; & l'on ſaura de plus, que l'angle *ADC* eſt aigu. Ainſi on trouvera la valeur de l'angle *DAC* ou de ſon alterne-interne *AFG*. Enfin, dans le triangle *AFG*, on connoîtra les angles en *F* & en *A*: donc on trouvera le troiſième angle *FGA*.

Cela poſé, la force du premier corps ſuivant la direction *FA*, étant *MV*, on la décompoſera en deux autres *MV'*, *MV''*, la première ſuivant *FG*, & la ſeconde perpendiculaire à *FG*. De même, la force du ſecond corps ſuivant *GA* étant *mv*, on la décompoſera en deux autres *mv'*, *mv''*, la première ſuivant *FG*, & la ſeconde perpendiculaire à la même ligne *FG*. Nous avons enſeigné ailleurs (*Num.* XLIX.) la manière de faire ces décompoſitions. Les deux forces *MV''*, *mv''* étant parallèles entr'elles & à la tangente *IH* menée aux points de contingence, il eſt évident que les corps n'agiſſent point l'un ſur l'autre en vertu de ces forces, & qu'ils ſe choquent ſeulement en vertu des forces *MV'*, *mv'*.

jusqu'à présent. On déterminera donc l
ments que prendroient les deux corps, s
quoient directement suivant la ligne FC
forces MV', mv'; & nommant MV''' &
mouvements qui viennent de la collision
plus question que de trouver la résultante
vements MV'', MV''', & celle des m
mv'', mv''', pour avoir les directions & l
des corps M & m après le choc.

Si les directions des deux mobiles M
doivent se choquer obliquement, n'ét
dans le même plan, ou si ces mobiles n'é
sphériques, ou si l'un de ces mobiles
choquer plusieurs autres mus suivant des
& avec des vîtesses quelconques, ou si l
tournoient sur eux-mêmes avant de se re
&c., il y auroit beaucoup plus de diffic
miner l'endroit du contact & le
tants du choc.

mens du corps sont animés: l'intersection f de ces deux lignes sera ce qu'on appelle *centre de percussion*. C'est un point où l'on peut supposer que toute la force du corps est ramassée. On voit par notre définition, que si tous les points d'un corps avancent parallélement avec des vîtesses égales, le centre de gravité sera le centre de percussion. Car alors la résultante de tous les mouvements dont les différents points du corps sont animés, passe par le centre de gravité (*Num.* CCL.). On voit de plus, que si les éléments du corps ont des mouvements qui ne soient pas réductibles à une seule force résultante (*Num.* LX.), le corps n'aura aucun centre de percussion.

Les Géomètres ont donné des méthodes générales pour déterminer le centre de percussion, dans les corps où il existe réellement. On trouvera dans plusieurs ouvrages connus, tout ce qu'on peut désirer sur ce sujet. Mais on peut entrevoir, que la théorie du centre de percussion, prise dans sa généralité, demanderoit une étendue que ne comporte pas un ouvrage, où l'on se propose de ne traiter que ce que la Méchanique a de plus simple. Je me bornerai donc à déterminer le centre de percussion d'un systême de plusieurs corps P, Q, R (*Fig.* 131), dont seroit chargée une verge CP, qui auroit une masse insensible & un mouvement de rotation autour du point fixe C. Je considérerai de plus chacun

des corps enfilés par cette verge, comme concentré en un ſeul point.

1° La verge infléxible paſſant dans un inſtant de la poſition CP à la poſition Cp, les corps décriront en même tems les arcs ſemblables & parallèles Pp, Qq, Rr. Soit v la vîteſſe du corps P, v' celle du corps Q, v'' celle du corps R. Les forces parallèles de ces corps feront Pv, Qv', Rv'', & leur réſultante vaudra $Pv + Qv' + Rv''$. Or il eſt évident que les vîteſſes v, v', v'', ſont entr'elles comme les arcs ſemblables Pp, Qq, Rr, décrits dans le même tems, ou comme les rayons CP, CQ, CR de ces arcs; c'eſt-à-dire, qu'on a les deux proportions $v : v' :: CP : CQ$; $v : v'' :: CP : CR$; d'où l'on tire $v' = \frac{v \times CQ}{CP}$, & $v'' = \frac{v \times CR}{CP}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de v' & de v'', la réſultante des forces des trois corps ſera $Pv + \frac{Qv \times CQ}{CP} + \frac{Rv \times CR}{CP} = v\frac{(P \times CP + Q \times CQ + R \times CR)}{CP} = \frac{v(P+Q+R)CG}{CP}$, en ſuppoſant que G ſoit le centre de gravité des corps. Car le moment de la ſomme des poids réunis au centre de gravité, doit égaler la ſomme des moments de ces poids, (*Num.* LXIV.).

2° En ſuppoſant que le centre de percuſſion ſoit f,

& que l'on prenne le point C pour centre des moments, nous aurons le moment de la résultante des forces égal à la somme des moments des forces composantes. Donc $\frac{v(P+Q+R)CG \times Cf}{CP}$

$=Pv \times CP + \frac{Qv \times \overline{CQ}^2}{CP} + \frac{Rv \times \overline{CR}^2}{CP}$; d'où

l'on tirera $Cf = \frac{P \times \overline{CP}^2 + Q \times \overline{CQ}^2 + R \times \overline{CR}^2}{(P+Q+R)CG}$.

Cette valeur de Cf est la même que nous avons trouvée (*Num.* CCIII.) pour déterminer la distance du point de suspension C (*Fig.* 98.) au centre d'oscillation d'un pendule composé, chargé de trois poids P, Q, R, comme la verge CP de la fig. 131. Donc le centre d'oscillation d'un pendule composé, coïncide avec le centre de percussion des poids dont il est chargé.

Cela prouve ce que nous avons avancé sans démonstration (*Num.* CCIV.), que la ligne Cf est plus longue que CG. Car si les corps P, Q, R, avoient des vîtesses égales, le point f se confondroit avec le centre de gravité G. Mais ceux de ces corps qui sont plus éloignés du point de suspension C, ayant plus de vîtesse que les autres, il est évident que la résultante de tous les mouvements doit se porter vers ces corps & passer par un point f plus éloigné du point C, que le centre de gravité G.

SECTION VI.

De la Réflexion des Corps.

CCXCI.

DANS le choc des corps à ressort, on appelle en général *mouvement de réflexion*, celui dont le corps choquant est animé après la réaction. On considère en particulier ce mouvement, dans le cas où un corps *M* (*Fig.* 132.), mu suivant une direction quelconque *AB*, vient frapper un plan fixe & impénétrable *GH*. Arrêtons-nous un moment sur la réflexion de ce corps.

1° La ligne *AB* suivant laquelle un tel corps est dirigé avant le choc, s'appelle *ligne d'incidence*; la ligne *BC* qu'il suit après avoir frappé le plan, est *la ligne de réflexion*; l'angle *ABG* que le plan forme avec la ligne *AB*, est *l'angle d'incidence*; l'angle *CBH* que le même plan forme avec la ligne *BC*, est *l'angle de réflexion.*

2° Supposons d'abord que le plan *GH* soit parfaitement dur & que le mobile *M* soit parfaitement élastique : je dis *que l'angle de réflexion* CBH *sera égal à l'angle d'incidence* ABG. En effet, si l'on représente la force du corps par la ligne d'incidence *AB*, on pourra la décomposer en deux autres, l'une *AG* perpendiculaire, & l'autre *AP* parallèle au plan. Or comme cette dernière force

demeure entière & que le plan ne résiste qu'à la force AG, le ressort se comprimera de plus en plus au point B, dans un sens perpendiculaire au plan, jusqu'à ce que cette force soit détruite. Ensuite la réaction rétablira le corps dans son premier état, en lui communiquant suivant BP, une force égale & parallèle à la force perpendiculaire AG, perdue dans la compression. Par conséquent le corps après la réaction sera sollicité par une force $BP = AG$, perpendiculaire au plan, & par une force $BH = AP$, parallèle au même plan. Donc si l'on achève le parallélogramme $APCH$, le corps décrira la diagonale BC, ce qui ne peut arriver, à moins que l'angle de réflexion CBH ne soit égal à l'angle d'incidence ABG. Car dans les triangles ABG, CBH, rectangles en G & en H, on aura $AG = CH$, $GB = BH$. Donc les angles ABG & CBH seront égaux.

Il est visible que si le corps venoit choquer le plan suivant une ligne perpendiculaire PB, il se réfléchiroit suivant la même ligne, puisqu'il n'y auroit pas de raison pour qu'il s'en écartât en un sens plutôt qu'en tout autre. Donc en ce cas, les angles d'incidence & de réflexion seroient égaux.

3° On démontrera de même, que l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, si le corps parfaitement dur vient frapper un plan parfaitement élastique, ou si le corps & le plan ont l'un & l'autre un ressort parfait.

4° Mais, par un raisonnement semblable, on fera voir que *si le corps & le plan sont imparfaitement élastiques, l'angle de réflexion sera nécessairement plus petit que l'angle d'incidence.*

Car alors la force parallèle *AP* demeurera entière, & sera représentée après le choc, par *BH* = *AP*. Mais la force perpendiculaire *AG* se changera par la réaction, en une force *AD* moindre que *AG* ou que *AP*. Donc si l'on fait le parallélogramme *BDEH*, le corps suivra la diagonale *BE*, & l'angle de réflexion *EBH* sera moindre que l'angle d'incidence *ABG*.

ARTICLE II.

Des obstacles qu'un Corps en mouvement peut éprouver.

CCXCII.

On appelle *obstacle au mouvement*, toute cause qui l'empêche de naître ou qui le détruit dans un corps. Les principaux obstacles au mouvement sont l'action des forces retardatrices, l'inertie des corps choqués, la résistance des milieux, le frottement des surfaces & la roideur des cordes qu'on emploie dans l'usage des machines. Nous avons exposé ailleurs avec assez d'étendue, les circonstances du mouvement retardé, par l'action de la pesanteur &

des forces centrales : nous traiterons de la résistance des milieux dans la seconde partie de cet ouvrage. Il ne nous reste donc à parler ici que de l'inertie des corps, du frottement des surfaces & de la roideur des cordes.

SECTION I.

De l'Inertie des Corps.

CCXCIII.

UN corps qui en rencontre un autre, perd autant de son mouvement, que celui-ci en reçoit (*Num.* CCLXXIII.). C'est donc une propriété commune à tous les corps qui sont choqués, non seulement de passer à un nouvel état, mais aussi de produire ou d'occasionner un changement dans l'état des corps qui les choquent.

CCXCIV.

QU'UN corps dont la masse est M, soit choqué par un corps m, qui augmente sa vîtesse d'une quantité Z. Qu'un autre corps dont la masse est M', soit aussi choqué par un corps m', qui augmente sa vîtesse d'un quantité Z'. Les changements produits dans les mouvements primitifs des corps choqués M & M', seront MZ, $M'Z'$. Donc MZ & $M'Z'$ seront aussi les changements produits dans les mouvements des corps choquants m & m' : ce qui fait voir que *les changements survenus dans l'état des corps*

choquants, à la rencontre des choqués, font toujours en raifon compofée des maffes M *&* M' *de ceux-ci, & des vîteffes* Z, Z', *qu'ils reçoivent dans le choc.*

Par conféquent, *fi* Z = Z', *les changements furvenus dans l'état des corps choquants* m *&* m', *feront comme les maffes* M *&* M' *des choqués.*

CCXCV.

TOUT le monde eft d'accord fur ces principes, qui font, je crois, la feule chofe effentielle à confidérer fur ce fujet. Mais les Phyficiens fe font partagés fur la nature de cette propriété que l'on obferve dans tous les corps, de produire ou d'occafionner un changement dans l'état de ceux qui les choquent. La plûpart l'ont confidérée comme une force répandue dans toute la matière, & l'ont appelée *force d'inertie.* Cette force eft, fuivant eux, proportionnelle à la maffe des corps; c'eft-à-dire, que plufieurs corps dont les maffes font comme les nombres quelconques 1, 2, 5, &c., exerceront contre les corps choquants, des forces comme 1, 2, 5, &c., dans le cas où la percuffion altérera leur vîteffe de la même quantité. D'autres ont prétendu que les corps choqués, en repos, ou mus fuivant la direction des corps choquants, n'oppofoient à ceux-ci ni forces, ni réfiftances, mais que les choquants perdoient une partie de leur mouve-

ment, parce qu'ils agissent, & qu'il résulte du choc un effet ou changement, soit dans leur état, soit dans celui des corps choqués. Enfin, d'autres soutiennent que les corps, dans le choc, n'agissent point l'un sur l'autre, & que toute l'action procède uniquement du Créateur.

Il faut bien que les différents auteurs dont nous parlons, n'attachent pas les mêmes idées à ces mots, *force*, *action*, *résistance*. Il paroît en effet, que les uns considèrent la force & l'action dans la cause étrangère qui donne aux corps leur mouvement; au lieu que les autres n'entendent par les mots *force* & *action*, qu'un effet produit dans les corps par cette cause étrangère. C'est ainsi que l'on appelle communément *force motrice* d'un corps, le produit de sa masse par sa vîtesse, quelle que soit la cause qui donne cette vîtesse; & qu'on nomme *action* le mouvement produit dans le corps choqué, quelle que soit la cause physique de ce mouvement. Pourquoi ne pourroit-on pas de même donner le nom de *force* à l'inertie des corps, en la considérant comme un effet qui occasionné un changement dans les corps choquants, quelle que soit la cause physique de ce changement?

Mais la force d'inertie, prise en ce sens, sera bien différente des forces motrices des corps, & des forces de pression. 1° Celles-ci supposent du mouvement ou une tendance au mouvement; au lieu

que la force d'inertie existe dans les corps même qui sont en repos & qui ne tendent point à se mouvoir. 2° Les forces des corps qui se choquent en sens opposés, se détruisent entièrement ou en partie, suivant qu'elles sont égales ou inégales; de manière qu'il y a moins de mouvement après qu'avant la collision : au lieu que la force d'inertie détruit, à la vérité, du mouvement dans le choquant, mais ce mouvement passe entiérement dans le choqué.

Observons encore que l'inertie d'un corps ne doit point être confondue avec sa pesanteur : elle en est tout-à-fait indépendante. En effet, si pendant qu'un corps tombe librement, on le suit de la main, avec une vîtesse plus grande que celle avec laquelle il tombe, on éprouvera en le rencontrant, un choc, une impression, qu'on ne peut évidemment attribuer à la pesanteur, qui n'agit que de haut en bas.

SECTION II.

Du Frottement.

CCXCVI.

LA surface des corps, même les plus polis, est hérissée d'un très-grand nombre d'éminences ou aspérités, & criblée de plusieurs cavités qu'on ap-

pelle *pores*. Lorſqu'un corps repoſe ſur un autre, les parties ſaillantes de l'un pénètrent dans les pores ou parties rentrantes de l'autre, & pour les dégager on éprouve une certaine réſiſtance qu'on nomme *le frottement*. On entend donc par frottement, la réſiſtance qu'apporte au mouvement de deux corps l'un ſur l'autre, l'inégalité de leur ſurface.

Or, on peut faire mouvoir deux ſurfaces l'une ſur l'autre, ou de manière que les mêmes parties de l'une ſoient ſucceſſivement appliquées à différentes parties de l'autre, comme lorſqu'on fait gliſſer un livre ſur une table; ou de manière que les différentes parties de l'une touchent ſucceſſivement les différentes parties de l'autre, comme il arrive lorſqu'on fait rouler une boule ſur un billard. On appelle *frottement de la première eſpèce*, celui des corps qui ne font ſimplement que gliſſer les uns ſur les autres; & *frottement de la ſeconde eſpèce*, celui des corps qui ont un mouvement de rotation. Il peut même exiſter un frottement *mixte*, qui participe des deux précédents; comme dans le mouvement d'un cercle ſur un plan (*Fig.* 133.), ſi l'on ſuppoſoit que le centre C décrivît dans une ſeconde la ligne CL, tandis que l'arc AB, moindre ou plus grand que CL, feroit ſucceſſivement appliqué à la ligne $AD = CL$. Il eſt évident qu'en ce cas le cercle rouleroit & gliſſeroit en même tems ſur le plan.

CCXCVII.

Il paroît très-difficile, pour ne pas dire impossible, d'établir des règles générales suffisamment exactes, pour déterminer le frottement. En effet, on conçoit aisément que cette résistance doit varier selon la manière dont un corps se meut sur un autre, selon le tissu & la nature des surfaces, objets susceptibles d'autant de variétés, qu'il y a de matières différentes: elle doit varier selon le degré de dureté ou de fléxibilité des surfaces frottantes; selon que les parties saillantes seront d'une figure & de dimensions plus ou moins propres à pénétrer dans les pores; selon que la pression qui applique les surfaces l'une à l'autre, sera plus ou moins grande; selon que cette pression aura agi plus ou moins longtems: car les parties des surfaces ayant toujours une certaine fléxibilité, les parties saillantes s'engageront plus profondément, si par un plus long séjour, elles ont plus le tems d'écarter ou élargir les pores dans lesquels elles tendent à pénétrer.

Mais comment chacune de ces causes doit-elle influer sur la grandeur du frottement? C'est ce qu'on ne peut déterminer *à priori*, puisqu'on ne connoît point la nature ni la forme des inégalités qui couvrent les surfaces des corps. Les Physiciens ont donc été forcés de prendre une autre route, & de consulter l'expérience qui seule peut servir de flambeau dans des cas semblables.

CCXCVIII.

CCXCVIII.

Pour faire des expériences sur cette matière, on peut placer le corps frottant *P* (*Fig.* 134.) sur un plan horizontal *AB*, & le faire tirer par un poids *R*, au moyen d'un cordon bien fléxible *CDR*, qu'on fait passer sur une poulie *D* très-mobile autour de son axe. La résistance du frottement est à peu près égale au poids *R* nécessaire pour mettre en mouvement le corps *P*. Cette méthode ne peut servir que pour évaluer le frottement de la première espèce. Il est même à remarquer que la plûpart des Auteurs qui l'ont employée, ont négligé non seulement la résistance produite par la roideur du cordon, mais aussi l'effet des frottements du cordon sur la poulie & de la poulie sur les supports de son axe, objets dont il semble qu'on doit tenir compte, au moins dans certaines expériences.

Un autre moyen bien simple que l'on peut employer pour déterminer & comparer les frottements des corps, consiste à les poser sur des plans d'abord très-peu inclinés à l'horizon, à augmenter ensuite par degrés l'inclinaison, jusqu'à ce que les frottements & les pesanteurs des corps se fassent équilibre.

Supposons en effet le corps *P* (*Fig.* 135.) prêt à se mouvoir sur le plan incliné *AB*, qui a pour hauteur *AC* & pour base *BC*. On pourra regarder le frottement comme égal à la force qui tend à faire

descendre le corps le long du plan. Or, G étant le centre de gravité de ce corps, si l'on représente son poids par la verticale GR, on pourra le décomposer en deux forces, l'une GH perpendiculaire au plan, & qui marquera la pression qu'il supporte; l'autre GL parallèle au plan, & qui fera équilibre à la résistance du frottement. Cette décomposition se fera en achevant le parallélogramme $GHRL$, dont le côté GH est perpendiculaire au plan, tandis que le côté GL lui est parallèle. Observant ensuite que les triangles GLR, ABC sont semblables, on en conclura les deux proportions suivantes $GL : GR :: AC : AB$; $GL : LR = GH :: AC : BC$. La première donnera $GL = \frac{GR \times AC}{AB}$, & la seconde $GL = \frac{GH \times AC}{BC}$. Donc 1° *la résistance du frottement sera égale au poids du corps multiplié par le rapport de la hauteur à la longueur de ce plan; 2° la même résistance sera aussi égale au produit de la pression perpendiculaire au plan, multipliée par le rapport de la hauteur à la base de ce plan.*

Si l'on suppose à présent un autre corps quelconque p sur un second plan incliné ab, qui ait pour hauteur ac & pour base bc, & que l'on décompose son poids gr en deux forces gh & gl, la première perpendiculaire, la seconde parallèle au

plan, on aura de même $gl = \frac{gr \times ac}{ab} = \frac{gh \times ac}{bc}$, ce qui donnera la ſuite de raiſons égales $GL : gl :: \frac{GR \times AC}{AB} : \frac{gr \times ac}{ab} :: \frac{GH \times AC}{BC} : \frac{gh \times ac}{bc}$.

Or GL & gl déſignent des quantités égales aux frottements, lorſque les plans ſont inclinés de maniere que les corps ſoient ſur le point de ſe mouvoir. Donc connoiſſant alors les hauteurs, baſes & longueurs des plans, ainſi que les poids ou preſſions des deux corps, on pourra déterminer le rapport de leurs frottements.

Sur quoi il faut encore obſerver que connoiſſant l'inclinaiſon du plan & le poids du corps, on trouve aiſément la preſſion GH. Car les triangles ſemblables GRH, BAC donnent la proportion $AB : BC :: GR : GH$, dans laquelle étant donnés les trois premiers termes, on a le quatrième.

Il ſeroit trop long d'expoſer ici les autres méthodes que l'on a employées pour faire des expériences ſur le frottement en général, & en particulier ſur le frottement des corps qui tournent ſur un axe, ou de ceux qui ſe meuvent circulairement autour d'un point fixe. On peut voir la deſcription de différents *tribomètres* ou inſtruments propres à ces expériences, dans les ouvrages de MM. *Deſaguliers*, *Muſchembroek* & *Nollet*.

CCXCIX.

VOICI maintenant les principaux résultats des expériences que l'on a faites sur le frottement.

1° Celui de la première espèce est beaucoup plus sensible que celui de la seconde. On conçoit en effet, que pour dégager les aspérités d'un corps qui glisse sur un autre, il faut ou les briser, ou les plier comme autant de ressorts, en soulevant un peu la masse; au lieu que dans le frottement de la seconde espèce, les parties engagées se relèvent presque sans effort, en tournant autour des suivantes, qui commencent à appuyer sur la surface inférieure.

2° Plus les surfaces des corps sont inégales & raboteuses, plus la résistance du frottement est considerable. On peut donc diminuer cette résistance en préparant & polissant les surfaces, ou en bouchant, autant qu'on le peut, leurs pores avec de l'huile, du savon, de la graisse, &c.; en un mot, avec quelque matière qui, en s'insinuant dans les pores, ne fasse pas contracter une nouvelle adhérence aux surfaces. On a de plus observé que les matières onctueuses, en rendant le mouvement plus aisé, font que les corps s'usent beaucoup moins que s'ils frottoient à sec; elles empêchent aussi qu'ils ne s'échauffent, ce qui n'est pas un moindre avantage dans bien des circonstances.

3° C'est de la pression que dépend principalement la résistance du frottement; & les expériences de

M. *Amontons*, (Mémoires de l'Académie, 1699.), mènent à conclure que, toutes choses d'ailleurs égales, c'est-à-dire, en supposant le même poli, la même grandeur & la même vîtesse dans les surfaces, leurs frottements sont sensiblement proportionnels aux pressions qui les appliquent les unes contre les autres. Cette conclusion n'est pourtant admissible, que lorsque les poids des corps ne diffèrent pas considérablement: car si les frottements GL, gl (*Fig.* 135.) croissoient généralement comme les pressions GH, gh, il faudroit que dans la proportion $GL : gl :: \frac{GH \times AC}{BC} : \frac{gh \times ac}{bc}$, démontrée ci-dessus, on eût toujours $\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$; ou, ce qui revient au même, il faudroit des plans également inclinés pour faire glisser deux corps P & p, quelles que fussent leurs pesanteurs. Or, on sait que le plan ou chantier sur lequel on construit les vaisseaux, n'a qu'une pente de 10 à 12 lignes par pied, & que cette pente est suffisante pour les faire aller à l'eau; tandis qu'une masse médiocre ne glisse point sur un plan, à moins qu'il n'ait une inclinaison de 15 à 18 degrés. Donc, s'il y a une grande différence entre les pressions de deux corps, on ne pourra pas les supposer proportionnelles aux frottements.

Pour supposer les frottements à peu près propor-

tionnels aux pressions, il faut encore que les corps frottants soient de même espèce. En effet, l'expérience apprend que dans le cas où la pression, le poli, la vîtesse & la grandeur des surfaces frottantes, sont les mêmes, le frottement est pour certaines matières le tiers de la pression, tandis que pour d'autres il n'en est que la sixième ou la septième partie. En général, lorsque les surfaces qui doivent glisser l'une sur l'autre sont de même matière, la résistance du frottement, toutes choses d'ailleurs égales, est plus grande que lorsqu'elles sont de matières différentes. Ainsi, deux bois de différente espèce auront moins de difficulté à se mouvoir l'un sur l'autre, que deux bois de même espèce: le fer frottera moins sur le cuivre, que le fer sur le fer, ou le cuivre sur le cuivre. Cet effet s'explique en considérant que dans les matières de même espèce, les surfaces étant semblablement hérissées d'éminences & de cavités, le contact est plus immédiat; les parties saillantes s'engagent plus avant dans les cavités, que cela n'arrive lorsque les matières sont de différente espèce.

Enfin, supposé que les frottements suivent les rapports des pressions, un corps posé sur un plan successivement par deux faces, l'une plus grande & l'autre plus petite, frottera de la même quantité dans les deux cas; puisque la pression & par conséquent le frottement de chacun des points de la

ſurface appliquée au plan, ſera d'autant moindre que cette ſurface ſera plus grande, ou que les points frottants ſeront plus nombreux. Or M. l'Abbé *Boſſut* nous apprend qu'ayant placé ſur une table horizontale un parallélipipède de bois, peſant environ 51 livres, & qu'il chargeoit encore de différents poids, il a fallu employer à peu près la même force pour le faire gliſſer par deux de ſes faces, dont l'une étoit environ cinq fois plus grande que l'autre, ce qui s'accorde avec les expériences de M. *Deſaguliers*. Il eſt donc naturel de penſer que dans de ſemblables expériences, faites en grand, le frottement ne dépend guères que de la preſſion.

Il paroît au contraire, que dans les expériences faites en petit, le frottement ne ſe trouve plus ſimplement proportionnel aux preſſions, mais que pour l'évaluer il faut avoir égard à la grandeur des ſurfaces. En effet, M. *Muſchembroek* rapporte qu'ayant mis en mouvement ſur des planches de ſapin, deux petites planches auſſi de ſapin, longues chacune de 13 pouces, & larges l'une d'un pouce & l'autre de deux pouces onze lignes, & chargées toutes les deux d'un même poids, y compris le poids de la planche, la plus large a toujours eu plus de frottement. M. l'Abbé *Nollet* a auſſi trouvé par des expériences réitérées, faites ſur des maſſes peu conſidérables, qu'en augmentant la ſurface frottante, ſans rien changer à la preſſion, on éprouvoit preſque toujours

plus de résistance. Si l'on ajoute à cela que tous les Artistes qui ont besoin pour la perfection de leur ouvrage de diminuer le frottement, sont dans l'usage constant de diminuer le contact & s'en trouvent bien, il sera difficile de ne pas pencher à croire que la grandeur des surfaces ne soit de quelque influence pour le frottement, au moins quand il est peu considérable.

Remarquons néanmoins que si on diminue la surface frottante jusqu'à la rendre tranchante ou pointue, on trouvera le frottement beaucoup augmenté, parce que les pointes & les tranchants sillonnent ou labourent le plan, & que pour mouvoir le corps il faut briser un bien plus grand nombre d'aspérités que dans le frottement ordinaire.

4° Le temps pendant lequel un corps est appliqué sur un plan, soit par sa pesanteur, soit par toute autre force, contribue beaucoup à faire varier la résistance du frottement; mais l'expérience n'a pas encore déterminé comment cette résistance augmente eu égard au tems; d'ailleurs on sent assez que l'augmentation due à cette cause, doit avoir des limites, & que ces limites varieront suivant la nature des surfaces frottantes.

5° Il n'est peut-être pas encore bien décidé, si la vîtesse des corps qui glissent les uns sur les autres, doit influer sur la quantité du frottement. D'un côté, il semble qu'un corps qui se meut plus vîte,

rencontre dans le même tems un plus grand nombre d'aſpérités dans le plan ſur lequel il ſe meut, les choque auſſi plus rudement ou les plie plus vîte, & par toutes ces conſidérations, doit éprouver beaucoup plus de réſiſtance à ſon mouvement. On conçoit d'un autre côté, qu'une plus grande vîteſſe peut ne pas donner aux parties ſaillantes des corps, le tems de s'engager auſſi profondément; qu'il eſt d'ailleurs poſſible que ces parties entraînées avec force, s'élèvent au-deſſus du plan, & paſſent pluſieurs cavités avant de retomber; enfin, qu'en ſuppoſant même qu'elles retombent toujours dans les cavités qui ſuivent immédiatement celles qu'elles ont quittées, le corps ne doit éprouver de réſiſtance, que comme par intervalle; au lieu qu'un corps en repos qu'on veut mouvoir, en éprouve une continuelle, qui paroît devoir s'oppoſer bien davantage au mouvement.

Cette dernière raiſon a fait penſer à M. *Euler*, qu'en général, le mouvement une fois commencé, le frottement devoit diminuer. Ce grand Géomètre a cru trouver dans l'expérience une autre preuve de ſon ſentiment. En mettant un corps ſur un plan dont il augmentoit l'inclinaiſon par degrés, il lui a paru que ce corps venant à gliſſer, parcouroit la longueur du plan beaucoup plus vîte qu'on ne devroit s'y attendre, ſi le frottement croiſſoit avec la vîteſſe.

M. *Muſchembroek*, au contraire, aſſure avoir trouvé par pluſieurs expériences, dont il ne donne aucun détail, que le frottement croît, à peu de choſe près, dans le même rapport que la vîteſſe, excepté lorſque la vîteſſe eſt très-conſidérable. Car dans ce cas, il lui a paru que le frottement augmentoit dans un plus grand rapport. « J'avoue cependant (ajoute cet Auteur) que quelque ſoin » que j'aie pris pour faire ces expériences, je ne » ſuis pas encore bien ſatisfait ſur cette matière. » Dans le tems que je les ai faites, on ne connoiſ» ſoit pas encore bien la méchanique du mouve» ment, &c. ».

M. *Hennert* rapporte avoir éprouvé fort ſouvent, qu'un corps mis en mouvement ſur un plan horizontal, par le moyen d'un poids, s'arrête après un certain tems; phénomène qui paroît inexplicable, ſi l'on n'admet que le frottement croît avec la vîteſſe, ou du moins qu'il croît alors par des raiſons qui ne nous ſont pas encore connues. Il peut arriver que le corps s'arrête en certain cas, ou parce que les aſpérités briſées s'accumulent en plus grand nombre entre les ſurfaces frottantes, ou parce que le corps ſupérieur un peu ſoulevé, entame le plan & le ſillonne en retombant dans les cavités par quelque angle ſolide, ou parce que le plan n'a pas un tiſſu homogène dans toute ſon étendue, &c. Quoi qu'il en ſoit, il paroît plus ſage d'attendre de

nouvelles expériences, pour décider si & comment la vîtesse doit entrer dans l'évaluation du frottement.

Ce seroit ici le lieu d'exposer les règles que les Géomètres ont données pour calculer, au moins par approximation, le frottement dans les machines. Mais, quelque intéressante que soit cette partie de la Méchanique, elle est nécessairement un peu compliquée, & je ne pourrois m'y arrêter sans passer les bornes que je me suis prescrites. On la trouvera traitée avec beaucoup d'élégance & de clarté, dans les Cours de MM. *Bossut* & *Bezout*.

CCC.

QUELQUES Auteurs ont avancé qu'un corps placé sur un plan incliné & abandonné à lui-même, doit culbuter & tomber en roulant, toutes les fois que la verticale menée par le centre de gravité rencontre le plan hors de la base du corps. Mais cette règle n'est juste, qu'en supposant qu'on ait égard au frottement. Car soit un globe *P* (*Fig.* 136) abandonné à lui-même sur un plan incliné *EF*. Il est évident que la verticale menée par son centre de gravité *C* ne passe point par la base du corps. Cependant, s'il n'y avoit point de frottement, le corps descendroit simplement en glissant. Supposant en effet que sa pesanteur, que je représente par *CG*, soit décomposée en deux forces, l'une *CH* perpen-

diculaire & l'autre *CL* parallèle au plan incliné; la première passera par le point de contact & sera détruite. Le corps descendra donc uniquement en vertu de la seconde *CL*, qui étant dirigée par le centre de gravité, doit communiquer la même vîtesse à tous les éléments du corps. Ainsi il n'y auroit aucun mouvement de rotation, si les parties correspondantes au contact n'éprouvoient un frottement qui diminue leur vîtesse.

En raisonnant de la même manière, on reconnoîtra qu'*un corps quelconque, précision faite du frottement, doit glisser sur un plan incliné, si la ligne menée de son centre de gravité perpendiculairement au plan, tombe sur un point de contact, ou si elle ne laisse pas du même côté tous les points où le corps & le plan se rencontrent.* Car alors décomposant la pesanteur du corps en deux forces, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle au plan, la première sera détruite immédiatement par la résistance du contact, ou du moins elle pourra se réduire à plusieurs autres forces dirigées perpendiculairement au plan dans les points où il est rencontré par le corps, & dans ce cas chacune de ces forces sera évidemment détruite. Il ne subsistera donc que la force parallèle au plan, qui étant dirigée par le centre de gravité du corps, ne peut lui donner aucun mouvement de rotation.

Si au contraire la perpendiculaire menée du centre

de gravité sur le plan, ne tombe sur aucun point où le corps & le plan se touchent, & qu'en même tems elle laisse du même côté tous les points de contact, le corps roulera en descendant le long du plan. Car alors la résistance ou réaction du plan qui est toujours dirigée dans un sens perpendiculaire au contact, agira suivant une direction qui ne passera point par le centre de gravité. Or cette résistance produit le même effet qu'une impulsion capable de soutenir le corps dans les differents points de contact, comme il est soutenu par le plan, impulsion qui n'étant pas dirigée par le centre de gravité, doit faire tourner le corps (*Num.* CCLII.). Donc la résistance du plan, qui est équivalente à cette impulsion, fera nécessairement déscendre le corps en roulant.

CCCI.

PARMI les effets sans nombre que le frottement peut occasionner, il ne sera pas inutile de remarquer ici les suivants.

1° Quand deux globes homogènes se rencontrent obliquement, on peut (*Num.* CCLXXXIX.) décomposer la force de chacun en deux autres, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle au plan de contingence. Si le frottement étoit nul, & que l'un de ces globes fût en repos avant le choc, il est visible que l'autre n'agiroit sur lui qu'en vertu de sa force perpendiculaire, qui étant dirigée

par les centres des deux corps, ne communiqueroit aucun mouvement de rotation. Mais il n'en est pas de même dans le cas du frottement. La force parallèle au plan de contingence se transmet à l'aide des aspérités de la surface, en partie d'autant plus grande, que la surface est plus susceptible de frottement, & doit de plus faire tourner sur lui-même le globe choqué, puisque sa direction ne passe point par le centre de ce globe. On voit assez par là, que le frottement doit aussi influer sur le mouvement des autres corps qui se choquent obliquement.

2° En supposant les corps incompressibles & le frottement nul, un globe qui tomberoit verticalement sur un plan horizontal, & qui auroit reçu par une cause quelconque un mouvement de rotation sur lui-même, ne conserveroit que ce mouvement après la collision. Mais le frottement lui fait éprouver une résistance dans un sens parallèle à la surface du plan, & cette résistance produit le même effet qu'une force qui agiroit contre les aspérités du globe au point de contingence. Or une telle force imprimeroit évidemment au globe entier un mouvement de translation. Donc aussi, en vertu du frottement, le globe doit rouler le long du plan.

C'est par cette raison qu'on explique pourquoi un boulet qui, en tombant, semble avoir perdu toute sa force, se ranime cependant souvent avec violence. Lorsqu'il est chassé par la force de la

poudre, il acquiert en frottant ſur la paroi inférieure de l'ame de la pièce, un mouvement de rotation qui ne s'altère que peu en l'air, & qui peut ſubſiſter preſqu'en entier, lorſque le mouvement progreſſif a été détruit par la rencontre de quelque obſtacle. Or le boulet tournant ainſi ſur lui-même, il eſt évident que la réſiſtance du frottement qu'il éprouve, peut lui imprimer un nouveau mouvement de tranſport.

3° C'eſt au frottement qu'on doit la facilité de rendre les parties de certaines machines tantôt fixes, tantôt mobiles. C'eſt par le frottement que les ciſeaux & autres inſtruments tranchants de cette nature, les pinces, tenailles, limes, &c., font leur effet. Si les lames de ciſeaux, par exemple, n'étoient point des ſcies armées de très-petites dents qui s'engagent dans les petites cavités des corps que l'on doit couper, ces corps gliſſeroient entre les deux tranchants. C'eſt auſſi au frottement que l'on doit l'avantage de pouvoir diminuer ce qu'il a de nuiſible, puiſque ce n'eſt que par le frotement qu'on parvient à uſer & à polir les ſurfaces des corps. Enfin, car il eſt inutile de pouſſer ce détail plus loin; ſans le frottement, ſur la moindre inclinaiſon ſur laquelle nous marcherions, nous ne pourrions nous empêcher de tomber. On voit donc que ſi le frottement eſt nuiſible dans beaucoup d'occaſions, il eſt encore plus ſouvent utile.

SECTION III.

De la Roideur des Cordes.

CCCII.

La roideur des cordes, ou la difficulté qu'on éprouve à les faire plier ſuivant une courbure donnée, eſt encore une des cauſes qui diminue l'effet des forces appliquées aux machines.

Pour ſe former une idée de la manière dont cette roideur préjudicie aux effets des forces, ſuppoſons une poulie *BCA* (*Fig.* 137.) qui tourne librement ſur les appuis de ſon eſſieu *E*, & ſur laquelle paſſe une corde *PBCAR* dont les extrémités portent deux poids égaux *P* & *R*. Si cette corde étoit parfaitement fléxible, ſans peſanteur, & que le frottement fût nul, pour peu qu'on augmentât l'un des poids, par exemple *P*, il deſcendroit & feroit monter l'autre en l'entraînant verticalement, de manière que le moment de *P*, par rapport au centre *E*, ſeroit conſtamment plus grand que celui de *R*. Mais ſi la corde éprouve de la difficulté à ſe plier, elle prendra dans ſon mouvement une courbure *P'B'CA'R'*, qui rendra le centre *E* moins éloigné de la direction *P'F* du poids *P*, que de la direction *R'G* de l'autre poids; & par conſéquent, en prenant pour centre des moments l'appui *E*, le moment du poids *P* deviendra plus petit par rapport à celui

du poids

du poids R, qu'il n'étoit à l'inſtant où ils ont commencé à ſe mouvoir. Donc il faudra que le poids P, quoique plus conſidérable que R, s'arrête, ou du moins qu'il deſcende avec moins de vîteſſe que dans le cas où l'on ſuppoſoit la corde parfaitement fléxible. On voit par là que la roideur des cordes doit toujours diminuer plus ou moins le mouvement produit par les puiſſances.

CCCIII.

Il eſt conſtant par l'expérience qu'une corde qu'on veut plier, réſiſte d'autant plus, 1° qu'elle eſt tendue avec plus de force, ou qu'elle eſt chargée d'un plus grand poids; 2° qu'elle eſt plus groſſe; 3° qu'elle s'enveloppe autour d'un plus petit rouleau. Mais on ne connoît pas bien préciſément la loi ſuivant laquelle ces trois éléments influent dans la réſiſtance que la corde oppoſe. La plûpart des Auteurs qui ont écrit ſur cette matière, ſuppoſent d'aprés les expériences de M. *Deſaguliers*, que *les roideurs des cordes ſont comme les rayons de ces cordes multipliés par les poids qui les tendent, & diviſés par les rayons des rouleaux autour deſquels elles s'enveloppent;* c'eſt-à-dire, qu'en nommant F & F' les roideurs de deux cordes, r & r' leurs rayons, P & P' les poids dont elles ſont chargées, R & R' les rayons des rouleaux ſur leſ-

quels on les fait passer, on a $F : F' :: \frac{Pr}{R} : \frac{Pr'}{R'}$.

Comme l'action des cordes s'exerce suivant la direction de leur axe, il faut, dans la proportion précédente, prendre pour R & R' les rayons à nu des poulies, ajoutés aux rayons des cordes; & supposant d'après une expérience de M. l'Abbé *Bossut*, sur l'exactitude de laquelle on peut compter, qu'une corde de 9 lignes de diamètre, sous une pression de 208 livres, en se pliant autour d'une poulie de 11 pouces 3 $\frac{1}{2}$ lignes, donne une roideur équivalente à un poids de 4 livres, on déterminera par approximation la roideur des autres cordes.



SECONDE PARTIE.

DE LA MÉCHANIQUE *DES FLUIDES.*

NOTIONS GÉNÉRALES.

CCCIV.

ON appelle *Méchanique des fluides*, ou *Hydrodynamique*, la ſcience qui a pour objet l'équilibre & le mouvement des fluides. La partie de cette ſcience qui conſidère l'équilibre des fluides, ſe nomme *Hydroſtatique* : celle qui conſidère leur mouvement, ſe nomme *Hydraulique*.

CCCV.

SI l'on connoiſſoit la nature des fluides, c'eſt-à-dire, le nombre, la figure & la poſition des molécules élémentaires dont une maſſe fluide eſt compoſée, il ne faudroit point d'autres principes que ceux de la Méchanique ordinaire, pour déterminer les loix de leur équilibre & de leur mouvement. Car c'eſt toujours un problême déterminé, que de trouver l'action mutuelle de pluſieurs corps unis entr'eux, dont on connoît la figure & l'arrangement reſpectif. Cependant plus le nombre des corpuſcules

feroit grand, plus le problème deviendroit compliqué; & cette méthode par conféquent ne feroit guères praticable dans les recherches hydrodynamiques. Mais nous fommes même bien éloignés d'avoir toutes les données néceffaires pour être à portée de pouvoir faire ufage d'une telle méthode. En effet, quoique nous puiffions confidérer un fluide comme un affemblage de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres & très-parfaitement mobiles entr'elles, nous ignorons la forme précife, la grandeur, le nombre & la difpofition de ces molécules. Il n'eft donc pas poffible d'évaluer leurs forces particulières, ni les réfultats de leurs actions mutuelles, en n'employant que les trois principes qui fervent de fondement à la Méchanique des corps folides. Il faut que l'expérience nous fourniffe ici quelque nouveau principe, en nous découvrant dans les fluides quelque propriété générale, dont on puiffe déduire les loix de l'Hydrodynamique.

CCCVI.

LES fluides font ou *incompreffibles* ou *élaftiques*. On nomme fluides incompreffibles ceux dont les parties font ou peuvent être regardées comme abfolument dures, de manière que, prifes en maffe, elles ne peuvent être réduites à occuper un volume plus petit que celui qu'elles occupent dans leur état naturel; telle eft l'eau & telles font la plûpart des liqueurs.

On entend par fluides élastiques, ceux qui sont composés de parties capables d'occuper un espace plus petit lorsqu'on les comprime, & de reprendre leur premier état, lorsque la cause qui les réduisoit à un plus petit volume, cesse d'agir. Tel est l'air, le feu, la vapeur de l'eau, &c.

CCCVII.

Le poids d'un fluide & même d'un corps quelconque, considéré en lui-même sans s'embarrasser du volume sous lequel il est contenu, est ce qu'on appelle *la gravité*, ou *pesanteur absolue*, ou même *le poids absolu du corps*. Le poids compris sous l'unité de volume est ce qu'on entend par *la pesanteur spécifique* ou *relative d'un corps*. C'est ce que pèse ce corps par pied cubique, ou par pouce cubique, &c., selon que l'on prend le pied cubique ou le pouce cubique, &c., pour unité de volume.

Il suit de ces définitions, que *le poids absolu d'un corps est égal au produit de la pesanteur spécifique par son volume*. Car si nous prenons le pied cubique pour unité de volume, il est évident que pour avoir le poids absolu du corps entier, il faudra répéter ce que pèse un pied cubique autant de fois qu'il y aura de pieds cubiques dans le volume du corps. Donc pour avoir le poids absolu, il faut multiplier la pesanteur spécifique par le volume.

Donc aussi *la pesanteur spécifique est égale au*

poids abſolu diviſé par le volume. Ainſi en nommant P & p les poids abſolus de deux fluides, V & v leurs volumes, G & g leurs peſanteurs ſpécifiques, nous aurons $G = \frac{P}{V}$, $g = \frac{p}{v}$; d'où nous tirerons la proportion ſuivante, $G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, qui nous apprend que *les peſanteurs ſpécifiques de deux fluides ſont entr'elles comme leurs poids abſolus diviſés par les volumes.*

Les maſſes des deux mêmes fluides ſont entr'elles comme les poids abſolus P & p (*Num.* LXIV.). C'eſt pourquoi en nommant M & m ces maſſes, on pourra ſubſtituer leur rapport au lieu de celui de P à p dans la proportion précédente, & l'on aura $G : g :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$. Donc *les peſanteurs ſpécifiques ſont comme les maſſes diviſées par les volumes.*

Et comme les denſités des mêmes fluides ſont auſſi comme les maſſes diviſées par les volumes (*Num.* VII.), il s'enſuit que *les peſanteurs ſpécifiques de ces fluides ſont proportionnelles à leurs denſités.*

Nous ſuppoſons évidemment que chacun des fluides comparés, a la même denſité dans toute ſon étendue.

Comme nous n'avons point parlé dans la Statique des propoſitions ſuivantes, dont nous ferons cependant uſage, nous allons les démontrer avant d'aller plus loin.

CCCVIII.

Si deux côtés EA, AB (Fig. 138.) *d'un triangle* EAB *sont pressés perpendiculairement dans leurs milieux par deux forces* P & Q, *qui leur soient proportionnelles & qui soient dirigées l'une & l'autre du dehors au dedans ou du dedans au dehors dans le plan du triangle, elles auront pour résultante une troisième force proportionnelle au troisième côté* BE *& dirigée perpendiculairement par le milieu de ce côté.*

En effet, prolongeant les directions des forces au-delà du point *b* où elles se coupent, & représentant *P* par la ligne *bc*, *Q* par la ligne *ba*, il est évident que leur résultante sera exprimée par la diagonale *be* du parallélogramme *baec*, formé sur ces deux lignes, & à cause de $bc = ae$, les valeurs des forces *P*, *Q*, & de leur résultante, seront représentées par les côtés *ae*, *ba*, *be* du triangle *bae*, dans lequel on aura les deux côtés *ba*, *ae* proportionnels aux côtés *BA*, *AE* du triangle *BAE*. De plus, l'angle *a* est égal à l'angle *A*, puisque les côtés qui forment le premier sont perpendiculaires à ceux qui forment le second; & les triangles *bae*, *BAE* sont semblables. Donc les forces *P* & *Q* ont une résultante *be* perpendiculaire & proportionnelle au côté *BE*. Or cette résultante est nécessairement dirigée par le milieu de ce côté; car

il eſt évident que le point *b* eſt le centre du cercle circonſcrit au triangle *B A E*.

CCCIX.

Si ſur les milieux des côtés EA, AB, BC, CD, DE (Fig. 139.) *d'un polygone infléxible* EABCD *ſont appliquées perpendiculairement les puiſſances* P, Q, R, S, T, *proportionnelles chacune à chacun des mêmes côtés, & toutes dirigées du dehors au dedans, ou du dedans au dehors, dans le plan du polygone ; ces puiſſances ſeront en équilibre.*

Car ayant mené du point *B* les diagonales *B E*, *B D*, la réſultante des forces *P* & *Q* ſera une force que je nomme *X*, proportionnelle à *B E* & perpendiculaire ſur le milieu de cette ligne ; la réſultante des forces *X* & *T* ſera une force que je nomme *Y*, proportionnelle à *B D* & perpendiculaire ſur le milieu de cette ligne ; enfin la réſultante des forces *Y* & *S* ſera une force que je nomme *Z*, proportionnelle à *B C*, perpendiculaire ſur le milieu de cette ligne, & par conſéquent détruite par la force égale *R* qui lui ſera directement oppoſée.

La démonſtration eſt la même, quel que ſoit le nombre des côtés du polygone. Elle a donc également lieu, lorſque le nombre des côtés du polygone devient infini. Or on peut regarder une courbe rentrante quelconque, comme un polygone d'une

nfinité de côtés. Donc si l'on conçoit une courbe entrante quelconque, infléxible, partagée en une ıfinité d'éléments, & qu'au milieu de ces éléments n applique perpendiculairement des puissances qui ur soient proportionnelles, ces puissances seront ı équilibre.

CCCX.

DANS un triangle rectangle BAC (Fig. 140.), *›nt le côté* AC *est vertical & le côté* CB *horizontal, tous les points de l'hypothénuse* AB *sont pressés ·rpendiculairement par des forces telles que* Pf, *ıi agissent toutes du dehors au dedans, ou du ·dans au dehors, dans le plan du triangle, & ı'on décompose chacune de ces forces en deux ıtres, l'une verticale* Pg, *& l'autre horizontale* h; *je dis que la force perpendiculaire à l'hypo-·énuse, la force verticale & la force horizontale, ront respectivement comme l'hypothénuse* AB, *la ıse* BC *& la hauteur* AC *du triangle.*

Car ayant fait le parallélogramme *Pgfh*, les ıleurs des trois forces seront représentées par les ;nes *Pf*, *Pg*, *Ph*, ou *Pf*, *hf*, *Ph*. Or les trois ôtés du triangle *Pfh* étant perpendiculaires sur les ôtés du triangle *BAC*, on a $Pf : BA :: fh : BC$ $: Ph : AC$.

CCCXI.

SI l'hypothénuse BA *du même triangle est per-*

pendiculaire aux côtés opposés & horizontaux HI, LM *d'un rectangle incliné* HL, *qui soit pressé dans tous ses points par des forces perpendiculaires, dont chacune soit décomposée en deux autres, l'une verticale & l'autre horizontale; je dis que chaque force perpendiculaire au rectangle sera à la force verticale & à la force horizontale qui la composent, comme l'hypothénuse* AB *est à la base* BC *& à la hauteur* AC *du triangle* BAC.

Car en imaginant que le rectangle *HL* soit une face d'un prisme triangulaire *HMNOLI*, dont la seconde face *MNOL* soit un rectangle vertical, & dont la troisième face *IHNO* soit un rectangle horizontal, on pourra concevoir ce prisme comme composé d'une infinité d'éléments triangulaires, égaux & parallèles à *BAC*, & chaque force perpendiculaire au rectangle incliné, agira dans le plan de l'un de ces éléments perpendiculairement à l'hypothénuse. Donc cette force sera à la force verticale & à la force horizontale, comme l'hypothénuse de l'élément triangulaire est à sa base & à sa hauteur; c'est-à-dire que ces trois forces seront dans le rapport des lignes *BA*, *BC*, *AC*.

On démontreroit par un semblable raisonnement, que la résultante de toutes les forces perpendiculaires au rectangle incliné *HL* est à la force verticale & à la force horizontale qui la composent, comme *BA* est aux lignes *BC* & *AC*.

CCCXII.

DONC *la résultante des forces perpendiculaires au rectangle incliné, & les deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale qui la composent, sont respectivement comme les rectangles* HL, HO & OM. En effet, il est évident que les surfaces de ces rectangles sont comme les lignes *AB*, *BC*, *AC*.

CCCXIII.

SI les côtés égaux *LM*, *NO*, différoient du côté *II* d'une quantité infiniment petite par rapport à leur longueur, on pourroit négliger cette différence, & dire encore que la résultante des forces perpendiculaires au trapèze *HL*, & les deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale, auxquelles elle est réductible, sont comme les trapèzes *HL*, *HO* & le rectangle vertical *OM*.

On peut observer que le trapèze *NO* est la projection du trapèze incliné sur un plan horizontal. Donc on peut dire que la force perpendiculaire au trapèze incliné est à la force verticale qu'on obtient par la décomposition dont il s'agit ici, comme le trapèze incliné est à sa projection sur un plan horizontal.

Il faut même ajouter que si l'on prend sur le rectangle ou trapèze incliné *HL*, une partie quelconque *mnp* pressée perpendiculairement dans tous ses points, & que l'on décompose la pression totale

en deux forces, l'une dans le ſens vertical & l'autre dans le ſens horizontal, la preſſion perpendiculaire ſera toujours à la force verticale, comme la ſurface *mnp* eſt à ſa projection *m'n'p'* ſur un plan horizontal. Car on peut concevoir la preſſion perpendiculaire comme agiſſante dans le plan d'un triangle égal & parallèle à *BAC* perpendiculairement à l'hypothénuſe. Or nous venons de voir que ſi l'on décompoſe une ſemblable preſſion en deux forces, l'une verticale & l'autre horizontale, la preſſion perpendiculaire eſt toujours à la force verticale, comme *AB* eſt à *BC*; & l'on démontre en Géométrie, que la ſurface inclinée *mnp* eſt auſſi à ſa projection *m'n'p'* ſur un plan horizontal, comme *AB* eſt à *BC*: Donc &c.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'HYDROSTATIQUE.

POUR plus de clarté, nous traiterons ſéparément de l'équilibre des fluides incompreſſibles, de celui des fluides élaſtiques, & de celui des fluides avec les corps ſolides qui y ſont plongés.



ARTICLE PREMIER.

)e l'Équilibre des Fluides incompressibles.

CCCXIV.

)RINCIPE FONDAMENTAL. *Une liqueur étant ı équilibre dans un vase* AMNE (Fig. 141), *si ı la presse perpendiculairement en un point quel- nque, la pression se transmettra toute entière à us les autres points du fluide, suivant des di- ctions quelconques; de manière que les parois du ıse seront pressées perpendiculairement dans chacun : leurs points, plus qu'elles ne l'étoient aupara- ınt, avec une force égale à la nouvelle pression.*

En effet, que l'on fasse dans les parois du vase lusieurs ouvertures pp', qq', rr', ss', tt', auxquelles n applique des pistons mobiles soutenus par des ırces P, Q, R, S, T, capables d'empêcher l'é- oulement du fluide. L'expérience apprend, que si on vient à augmenter l'une de ces forces, par xemple P, il faudra, pour empêcher l'écoulement, ugmenter chacune des autres forces Q, R, S, T, roportionnellement à la grandeur des orifices fer- nés par les pistons qu'elles soutiennent. Si l'on ugmente d'une livre la puissance P, on ne pourra mpêcher le fluide de s'échapper, qu'en augmentant 'une livre une puissance appliquée à un orifice égal pp', de deux livres une puissance appliquée à un

orifice double de pp', de trois livres une puissance appliquée à un orifice triple de pp', &c. Et comme on peut supposer l'ouverture pp' aussi petite qu'on voudra, il s'en suit qu'en lui donnant pour diamètre celui d'une molécule fluide, on ne pourra presser cette molécule, sans que la pression ne se transmette toute entière & suivant des directions quelconques, à toutes les autres molécules qui composent le fluide.

CCCXV.

THÉORÈME I. *Une liqueur contenue dans un vase* AMNE (Fig. 142), *& abandonnée à l'action libre de la pesanteur, sera en équilibre, si sa surface supérieure* ae *est horizontale.*

Pour le démontrer, imaginons cette liqueur divisée en tranches horizontales $aefb$, $bfgc$, &c., chacune infiniment mince; & supposons d'abord qu'il n'y ait que la première tranche $aefb$ qui soit pesante. Il est évident (*Num.* CCCXIV.), que la pesanteur du filet vertical pq, pris dans cette tranche, doit produire dans toute la masse $bfNM$ une pression qui agira contre chaque point des parois, avec une force égale au poids de pq, & qu'un point quelconque i de la surface bf sera soulevé verticalement avec une force égale au poids du même filet. Or chaque point i de la surface bf est en même tems poussé de haut en bas par la pesanteur d'un filet vertical $hi = pq$. Donc il est im-

possible qu'aucun point de la surface bf s'élève ou s'abaisse, & par conséquent l'équilibre subsistera.

Supposons à présent que la seconde tranche $bfgc$ soit pesante, ainsi que la première. Chaque point de la surface $cgNM$ qui comprend le reste de la masse fluide, sera pressé perpendiculairement par une force égale aux poids des deux filets verticaux pq, qr: donc chaque point l de cg sera soulevé verticalement par une force égale au poids de ces deux filets; & comme ce point est en même tems poussé de haut en bas par le poids des deux filets correspondants hi, il, égaux aux premiers pq, qr, il y aura encore équilibre.

On démontrera de même qu'il y aura équilibre, en supposant que toutes les tranches inférieures soient pesantes comme les deux premières.

CCCXVI.

REMARQUE. On peut employer une semblable démonstration, pour prouver qu'une liqueur abandonnée à l'action libre de sa pesanteur dans un syphon $AMNE$ (*Fig.* 143.), sera en équilibre, si ses surfaces supérieures ae, $a'e'$ sont horizontales & de niveau.

Car imaginant la liqueur divisée en tranches horizontales par une infinité de plans ae', bf', cg', &c., supposons d'abord qu'il n'y ait de pesanteur que dans les deux tranches supérieures $aefb$, $a'e'f'b'$ qui se

répondent dans les deux branches. Il eſt évident que la peſanteur du filet vertical pq produira dans tous les points du fluide $fbMNf'b'$, une preſſion égale au poids de ce filet, & qu'ainſi tous les points des ſurfaces bf, $b'f'$ feront ſoulevés verticalement par des forces équivalentes au poids du filet pq. Donc tous ces points étant pouſſés de haut en bas par les poids des filets ſupérieurs qui leur répondent verticalement & dont chacun eſt égal à pq, le fluide ne pourra prendre aucun mouvement, & par conſéquent il demeurera en équilibre.

Si l'on ſuppoſoit enſuite que les deux ſecondes tranches $bfgc$, $b'f'c'g'$, devînſſent peſantes comme les premières, la peſanteur des deux filets verticaux pq, qr, produiroit dans tous les points du fluide $gcMNg'c'$ une preſſion égale au poids de ces deux filets; & par conſéquent tous les points des ſurfaces cg, $c'g'$ feroient ſoulevés verticalement par des forces égales au poids de pq, qr. Or ces mêmes points ſeroient repouſſés de haut en bas, chacun par le poids de deux filets verticaux, équivalents à pq, qr. Donc il y auroit toujours équilibre.

Et comme on peut appliquer le même raiſonnement à toutes les tranches ſuivantes, compriſes entre les mêmes plans horizontaux, il eſt évident que la maſſe fluide entière ſera en équilibre, ſi les ſurfaces ſupérieures ae, $a'e'$ ſont de niveau dans les deux branches du ſyphon.

CCCXVII.

CCCXVII.

CoROLLAIRE I. Quand la liqueur contenue dans le vase *AMNE* (*Fig.* 142.) est pesante, tous les points des parois en sont pressés perpendiculairement. Donc elle s'échapperoit nécessairement par une ouverture faite en un point quelconque des parois. Et comme la vérité de cette proposition ne dépend aucunement de la figure du vase, on peut dire que tous les points des parois seroient pressés perpendiculairement, si la surface supérieure *AE* se réduisoit à un seul point, & que le vase eût la forme *ABMNDE* (*Fig.* 144.). Par conséquent, si l'on supprimoit la partie *ABCDE* des parois, le fluide correspondant ne pourroit conserver sa position. Donc *un fluide pesant, contenu dans un vase, ne peut être en équilibre, à moins que sa surface supérieure ne soit horizontale.*

CCCXVIII.

COROLLAIRE II. *On démontrera avec la même facilité, qu'une liqueur contenue dans un syphon renversé* AMNE (Fig. 145.), *ne peut être en équilibre, à moins que ses surfaces supérieures* ae, a'e' *ne soient horizontales & de niveau.*

Car supposons ces surfaces de niveau, & imaginons que le fluide soit fermé en *a'e'*. Il est évident qu'on ne pourroit ajouter sur *ae* une tranche horizontale *amne*, sans que la pesanteur d'un filet

vertical pq, pris dans cette tranche, ne produisît dans toute la masse $eaMNe'a'$ une pression équivalente au poids de pq; & l'on ne pourroit placer sur mn de nouvelles tranches horizontales, sans augmenter de plus en plus cette pression. Donc le fluide s'échapperoit par un orifice quelconque pratiqué dans le couvercle $a'e'$, & par conséquent la liqueur s'élèveroit dans la branche NE du syphon, si elle n'étoit pas fermée en sa partie supérieure.

CCCXIX.

THÉOREME II. *La pression perpendiculaire qu'une liqueur en équilibre dans un vase* AMNE (Fig. 142.) *exerce contre un point quelconque* m *des parois, est égale au poids d'un filet fluide qui auroit* m *pour base, & la distance de ce point au niveau pour hauteur.*

En effet, concevant toujours la liqueur divisée par une infinité de plans horizontaux, chacune des tranches plus élevées que le point m lui communiquera, perpendiculairement aux parois, une pression égale au poids d'un filet vertical pris dans cette tranche. Donc pour avoir la pression totale supportée par le point m, il faut ajouter ensemble le poids d'un filet vertical de la première tranche, celui d'un filet vertical de la seconde, celui d'un filet vertical de la troisième, &c., en descendant jusqu'en m. Or la somme de ces filets est évidemment égale à un

ſeul filet, qui iroit verticalement du point *m* juſqu'au niveau.

CCCXX.

COROLLAIRE I. *Donc la preſſion que ſupporte le fond horizontal* MN *d'un vaſe* AMNE (Fig. 146, 147, 148.), *eſt égale au poids abſolu d'un priſme fluide, qui auroit ce fond pour baſe, & la diſtance de ce fond au niveau pour hauteur.*

Car un point quelconque *m* du fond *MN* eſt preſſé, comme on vient de le dire, par le poids du filet vertical *om*, qui a pour hauteur la diſtance du fond au niveau. Donc puiſque tous les points du fond ſont également éloignés du niveau, on aura la preſſion entière que le fluide exerce ſur ce fond, en répétant le poids du filet *om* autant de fois qu'il y a de points dans *MN*. Or il eſt viſible que le poids de *om* répété autant de fois qu'il y a de points dans le fond *MN*, équivaut au poids d'un priſme fluide qui auroit pour baſe la ſurface *MN*, & pour hauteur la diſtance de *MN* au niveau.

CCCXXI.

COROLLAIRE II. *Donc pour avoir la preſſion ſoutenue par le fond* MN (Fig. 146, 147, 148.), *il faut multiplier la peſanteur ſpécifique du fluide par ſa hauteur & par la ſurface du fond* MN.

Car en multipliant *MN* par la hauteur *om* du fluide, on a le volume d'un priſme dont la baſe eſt

le fond du vaſe, & dont la hauteur eſt la diſtance de ce fond au niveau. En multipliant enſuite ce volume par la peſanteur ſpécifique du fluide, on trouve le poids abſolu du même priſme, & par conſéquent la preſſion que ſupporte *M N* (*Num.* CCCXX.).

On voit par là, que la diſtance du fond horizontal *MN* au niveau demeurant la même, ce fond eſt toujours également preſſé par le fluide, ſoit que le vaſe ait le même diamètre dans toute ſa hauteur (*Fig.* 146.), ſoit qu'il aille en s'élargiſſant de bas en haut (*Fig.* 147.), ſoit qu'il aille en ſe rétréciſſant (*Fig.* 148.).

CCCXXII.

COROLLAIRE III. *La preſſion perpendiculaire qu'une liqueur contenue dans un vaſe* AMNE (Fig. 149.) *de figure quelconque, exerce contre une partie de dimenſions infiniment petites* a a′ b′ b *des parois, eſt égale au produit qui a pour facteurs cette partie élémentaire, ſa diſtance au niveau, & la peſanteur ſpécifique du fluide.*

Car la preſſion perpendiculaire que ſupporte chaque point de la petite ſurface *a a′ b′ b*, qu'on peut regarder comme plane, eſt égale au poids d'un filet vertical, qui iroit de ce point juſqu'au niveau du fluide. Donc pour avoir la preſſion totale, il faut ajouter enſemble autant de filets verticaux, qu'il y a de points dans *a a′ b′ b*. Or tous ces filets ne dif-

férant en longueur qu'infiniment peu, leur somme est équivalente à un prisme droit qui auroit pour base la surface élémentaire *aa'b'b*, & pour hauteur la distance de cette surface au niveau; prisme dont le poids est évidemment exprimé par un produit qui a pour facteurs la surface *aa'b'b*, sa distance au niveau & la pesanteur spécifique du fluide.

CCCXXIII.

COROLLAIRE IV. *Donc pour avoir la pression perpendiculaire que supporte un élément* aa'b'b, *il suffit de prendre son moment par rapport au plan de niveau, & de le multiplier par la pesanteur spécifique du fluide.*

En effet, le moment de la petite surface *aa'b'b* par rapport au plan de niveau, est égal au produit de *aa'b'b* par sa distance à ce plan.

CCCXXIV.

COROLLAIRE V. *La somme des pressions perpendiculaires qu'un fluide contenu dans un vase* AMNE (Fig. 149.) *exerce contre une partie quelconque* acde *des parois, est égale au poids d'un prisme droit du fluide, qui auroit pour base la surface* acde, *& pour hauteur la distance* OG *du niveau au centre de gravité* G *de cette surface.*

En effet, supposons que la surface de niveau *AE* soit le plan des moments, & concevons la surface

acde diviſée en parties élémentaires de dimenſions infiniment petites, telles que *aa'b'b*. En prenant d'un côté la ſomme des moments de toutes ces parties par rapport au plan *AE*, & de l'autre le moment d'une ſurface plane de même étendue que *acde*, & dirigée par le point *G* parallèlement au même plan *AE*; nous aurons deux quantités égales (*Num.* LXIV.), & qui donneront des produits égaux, ſi on les multiplie l'une & l'autre par la peſanteur ſpécifique du fluide. Or le premier de ces produits exprimera la ſomme des preſſions perpendiculaires que le fluide exerce contre la partie *acde* des parois, & le ſecond exprimera le poids abſolu d'un priſme droit de fluide qui auroit pour baſe une ſurface plane de même étendue que *acde*, & pour hauteur la diſtance du centre de gravité *G* au niveau. Donc, &c.

Pour faire ici une application bien ſimple de la propoſition que nous venons de démontrer, ſoit *ABCD* (*Fig.* 150.) une vanne rectangulaire & verticale d'écluſe, ſoutenant la preſſion de la maſſe d'eaux dormantes *ADX*, dont l'étendue *DX* eſt auſſi grande ou auſſi petite qu'on voudra, (car cela eſt abſolument indifférent quant à l'effet de la preſſion). Soit *G* le milieu ou le centre de gravité de la vanne, *OG* la diſtance du niveau à ce point, & *p* la peſanteur ſpécifique de l'eau. Pour avoir la preſſion entière que ſupporte la vanne, il faudra

chercher le poids absolu d'un prisme d'eau, qui auroit la surface de la vanne pour base, & la ligne *OG* pour hauteur. Il faudra donc multiplier la surface de la vanne qui est $AD \times AB$, par OG qui vaut $\frac{AB}{2}$, & par la pesanteur spécifique p du fluide, ce qui donnera $p \times AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2}$.

Supposons, par exemple, $AD = 3$ pieds, $AB = 10$ pieds: on aura $AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2} = 150$ pieds cubes; & comme le pied cube d'eau douce pèse environ 70 livres, il s'ensuit que la pression exprimée par $p \times AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2} = 10500$ livres.

On détermineroit aussi facilement la pression, si la vanne n'étoit pas verticale, & qu'elle eût même toute autre figure que la figure rectangulaire.

CCCXXV.

COROLLAIRE VI. *Si l'on décompose la pression perpendiculaire que supporte une partie infiniment petite des parois d'un vase en deux forces, l'une verticale & l'autre horizontale, la force verticale sera toujours équivalente au poids absolu d'un prisme fluide, qui auroit pour hauteur la distance du niveau à cette partie élémentaire, & pour base*

la projection de la même partie sur le plan du niveau.

Pour le démontrer, nommons S la surface infiniment petite $abb'a'$ (*Fig.* 151.), prise dans les parois, h sa distance au plan de niveau, s sa projection $uxyz$ sur ce plan, F la pression perpendiculaire qu'elle supporte, f la force verticale que cette pression donne par sa décomposition, & enfin p la pesanteur spécifique du fluide. Nous aurons (*Num.* CCCXIII.), $F : f :: S : s$; ou multipliant les deux termes de la seconde raison par ph, $F : f :: phS : phs$. Or $F = phS$ (*Num.* CCCXXII.): donc aussi $f = phs$, & par conséquent la force verticale f est égale au poids d'un prisme fluide, qui auroit s pour base & h pour hauteur.

CCCXXVI.

Corollaire VII. *Si l'on décompose en forces verticales & horizontales toutes les pressions perpendiculaires que supportent les parois d'un vase dans leurs différents points, la résultante des forces verticales sera égale au poids absolu du fluide contenu dans le vase.*

Car supposant qu'on applique une enveloppe à la surface supérieure AE du fluide, on pourra concevoir tout ce fluide comme composé de prismes tronqués & verticaux d'une grosseur infiniment petite, & dont chacun, tel que $abb'a'c'd'dc$ sera

ɜrminé par des éléments $abb'a'$, $cdd'c'$ des parois.
›n voit de plus, que ces éléments qui ferviront de
afes au même prifme vertical, auront la même
:ojection $uxyz$ fur le plan de niveau XZ.

Cela pofé, fi nous nommons refpectivement h
: h' les diftances du niveau aux éléments $abb'a'$,
ɔd$d'c'$; s la furface de leur projection $uxyz$, p
pefanteur fpécifique du fluide; nous aurons phs
: $ph's$ pour les forces verticales correfpondantes
ıx éléments dont il s'agit; & comme la première
ɜ ces forces eft dirigée de bas en haut, tandis que
fеconde eft dirigée de haut en bas, leur réfultante
ra évidemment égale à leur différence $ph's—phs$,
u $ps\,(h'—h)$. Or cette dernière quantité exprime
poids abfolu d'un prifme droit de fluide, qui au-
)it pour bafe la projection s; & pour hauteur la
iftance $h'—h$ des deux éléments $abb'a'$, $cdd'c'$;
rifme qu'on doit confidérer comme égal au prifme
onqué $abb'a'c'd'dc$, puifqu'il n'en diffère jamais
ı'infiniment peu.

On peut appliquer le même raifonnement à cha-
ın des autres prifmes tronqués dont le fluide eft
ɔmpofé. Donc la fomme ou la réfultante des forces
ɜrticales, qui agiffent contre les différents points
ɜs parois, eft égale au poids abfolu du fluide con-
ɜnu dans le vafe.

CCCXXVII.

COROLLAIRE VIII. *Toutes les preffions perpen-*

diculaires aux parois d'un vase étant décomposées comme dans les corollaires précédents, les forces horizontales se détruiront mutuellement.

Pour le démontrer, imaginons le vase *AMNE* (*Fig.* 152.) coupé par une infinité de plans horizontaux infiniment peu éloignés les uns des autres, tels que $abcd$, $a'b'c'd'$. Les contours de ces sections différeront infiniment peu, & l'on pourra concevoir la partie des parois comprise entre deux sections consécutives, comme composée d'une infinité de petits trapèzes $abb'a'$, $mnn'm'$, &c., dans chacun desquels la différence entre les côtés horizontaux sera infiniment plus petite que ces côtés. Or si nous nommons respectivement F & F' les pressions perpendiculaires que la liqueur exerce sur deux de ces trapèzes $abb'a'$, $mnn'm'$; S & S' les surfaces de ces trapèzes, s & s' les surfaces des deux rectangles construits sur les côtés ab, mn, & qui auroient pour hauteur la distance des deux sections consécutives $abcd$, $a'b'c'd'$; enfin f & f' les forces horizontales que donnent les pressions perpendiculaires F & F' décomposées en sens vertical & en sens horizontal; nous aurons (*Num.* CCCXXII & CCCXIII.) les trois proportions suivantes,

$$F : F' :: S : S';$$
$$f : F :: s : S;$$
$$F' : f' :: S' : s'.$$

Multipliant par ordre ces proportions, & divisant

ar FF' les deux termes de la première raison du roduit, & par SS' les deux termes de la seconde aison, il nous restera $f : f' :: s : s'$. Or les surces rectangulaires s & s' ayant même hauteur, sont omme les côtés ab, mn. Donc les forces horiontales correspondantes à deux trapèzes élémenires quelconques, pris à la même distance du nieau, sont comme les côtés horizontaux de ces apèzes. On peut aussi les concevoir appliquées à s côtés, à cause de l'épaisseur infiniment petite de aque tranche comprise entre deux sections conutives. Donc (*Num.* CCCIX.) les forces horintales appliquées à tous les trapèzes élémentaires une même tranche, doivent se faire équilibre & détruire mutuellement; & par conséquent la réltante des forces horizontales correspondantes à ous les points des parois, doit être zéro.

CCCXXVIII.

Corollaire IX. Donc pour soutenir un vase empli de fluide, il ne faut employer qu'une force gale aux poids du vase & à la somme des forces erticales qui résultent de l'action du fluide contre s parois; ou, ce qui revient au même, il ne faut u'une force égale au poids du vase & à celui du uide pris ensemble. On voit que cette force peut re fort différente de la pression que le fluide exerce ir le fond du vase. Dans la figure 148, par exemple,

le fond horizontal *MN* eſt preſſé par une force égale au poids d'un priſme fluide qui auroit ce fond pour baſe & ſa diſtance au niveau pour hauteur, (*Num.* CCCXX.); & cependant pour ſoutenir le vaſe, il ne faudroit qu'un effort égal à ſon propre poids & à celui du fluide *AMNE*.

CCCXXIX.

Corollaire X. On peut faire une infinité d'applications des propoſitions que nous avons expoſées juſqu'à préſent. Nous nous contenterons d'en tirer ici une méthode pour déterminer l'épaiſſeur qu'on doit donner aux parois des tuyaux cylindriques, afin qu'ils puiſſent réſiſter à la preſſion des liqueurs dont ils ſont remplis.

Soient donc deux tuyaux cylindriques, verticaux & droits *AMNE*, *A'M'N'E'* (*Fig.* 153), dont on conſidère les anneaux élémentaires *abcd*, *a'b'c'd'*, comme compoſés d'une infinité de filets circulaires joints enſemble, & qui forment des eſpèces de machines funiculaires, dont tous les points ſoient preſſés perpendiculairement par les fluides contenus dans ces tuyaux.

Il eſt évident 1° que tous les points du même anneau ſeront preſſés par des forces égales, puiſque la preſſion d'un point quelconque eſt égale au poids d'un filet vertical qui auroit ce point pour baſe, & la diſtance au niveau pour hauteur (*Num.* CCCXIX.).

2° Que la somme des pressions perpendiculaires e supporte l'un de ces anneaux, sera toujours ıle au produit qui auroit pour facteurs le contour érieur de cet anneau, sa distance au plan de niveau, la pesanteur spécifique du fluide.

3° Que les pressions du fluide doivent produire : égale tension dans tous les points du même eau, puisqu'il n'y a point de raison pour que :e tension soit plus considérable dans une partie dans l'autre.

[4]° Il suit de la proposition démontrée (*Num.* XXIX.), que la tension produite dans chaque nt du même anneau, est à la somme des pressions pendiculaires qu'il supporte, comme le rayon n cercle est à sa circonférence. Donc les tensions s l'un & l'autre anneau sont proportionnelles pressions perpendiculaires qu'ils supportent; & conséquent en nommant C & C' les contours :rieurs des deux anneaux, H & H' leurs dis- :es aux plans de niveau, p & p' les pesanteurs :ifiques des fluides contenus dans les deux cy- .res, F & F' les tensions produites dans les deux eaux, on aura la proportion $F : F' :: pHC : p'H'C'$. comme les diamètres des cylindres, que nous ımerons D & D', sont comme les contours C :' (car nous considérons les contours intérieurs ıme des circonférences de cercles, ou du moins s leur supposons la même hauteur infiniment

petite), on pourra substituer dans la proportion précédente le rapport de D à D', au lieu de celui de C à C'; ce qui donnera $F : F' :: pHD : p'H'D'$.

5° Les anneaux pressés par les fluides résistent d'autant plus à leur rupture, qu'ils ont plus d'épaisseur & que la matière dont ils sont composés a plus de ténacité. Car plus les parois du vase ont d'épaisseur, plus il y a de filets à séparer dans chaque anneau; & lorsque la matière dont le cylindre est fait, a plus de ténacité, les filets se rompent plus difficilement. Ainsi en nommant R & R' les plus grandes résistances que les deux anneaux puissent opposer à leur rupture, E & E' les épaisseurs des parois, T & T' les ténacités des matières dont elles sont composées, nous aurons $R : R' :: ET : E'T'$.

6° Lorsque les anneaux sont sur le point de céder à l'action du fluide ou de se rompre, les tensions F & F' sont égales aux résistances R & R' qu'ils opposent à leur rupture. Donc alors $ET : E'T' :: pHD : p'H'D'$. Divisant les deux antécédents de cette proportion par T, & les deux conséquents par T', on trouve $E : E' :: \frac{pHD}{T} : \frac{p'H'D'}{T'}$.

Considérant donc les anneaux qui touchent les bases des deux cylindres, & qui doivent crever les premiers, parce qu'ils éprouvent plus de pression de la part des fluides, nous pourrons conclure que *les épaisseurs des parois, au moment qu'elles sont sur*

le point de céder dans leur partie inférieure, sont en raison composée de la directe des pesanteurs spécifiques des liqueurs, de leurs hauteurs, des diamètres des cylindres, & de l'inverse des ténacités des matières dont les tuyaux sont faits.

Lorsque les liqueurs sont de même espèce, aussi bien que les matières dont les tuyaux sont composés, la proportion se simplifie & devient

$$E : E' :: HD : H'D'.$$

7° Enfin suivant une expérience de M. *Parent*, les parois d'un tuyau de plomb de 12 pouces de diamètre, & de 60 pieds de hauteur, doivent avoir 6 lignes d'épaisseur, pour soutenir verticalement, sans crever, l'effort de l'eau. Nommons E l'épaisseur des parois de ce tuyau, D son diamètre, H sa hauteur, T la ténacité du plomb, p la pesanteur spécifique de l'eau. Il est évident que connoissant le diamètre D' d'un autre tuyau quelconque, H' sa hauteur, T' la ténacité de la matière dont il est fait, p' la gravité spécifique du fluide qui le remplit, on trouvera toujours par une simple proportion l'épaisseur E' que doivent avoir ses parois pour résister à la pression de ce fluide.

Qu'on propose, par exemple, de déterminer l'épaisseur que doit avoir un tuyau de plomb de 6 pouces de diamètre, & qui doit soutenir l'effort d'une colonne d'eau de 100 pieds de hauteur. La proportion $E : E' :: HD : H'D'$, deviendra

$6^{ll} : E' :: 60 \times 12 : 100 \times 6$, d'où l'on tirera $E' = 5$ lignes.

Qu'on demande encore l'épaisseur que doit avoir un tuyau de cuivre de 24 pouces de diamètre, pour soutenir l'effort d'une colonne de mercure de 30 pieds de hauteur. La ténacité du plomb étant à celle du cuivre, comme 1 est à 28 environ, & la pesanteur spécifique de l'eau à celle du mercure, comme 1 à 14 environ, nous pourrons supposer $T = 1$, $T' = 28$, $p = 1$, $p' = 14$, & la proportion $E : E' :: \frac{pHD}{T} : \frac{p'H'D'}{T'}$, deviendra

$$6^{ll} : E' :: \frac{1 \times 60 \times 12}{1} : \frac{14 \times 30 \times 24}{28};$$

d'où l'on tirera $E' = 3$ lignes.

CCCXXX.

THÉORÈME III. *Deux liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes sont en équilibre dans les deux branches d'un syphon, quand le plan qui les sépare est horizontal & que leurs hauteurs au-dessus de ce plan sont réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques*

En effet, que la branche ADB du syphon $ADBC$ (*Fig.* 154.) contienne une liqueur dont la pesanteur spécifique soit p, tandis que l'autre branche BC contient une liqueur d'espèce différente, & dont la pesanteur spécifique est p'. Supposons que les hauteurs

hauteurs de ces liqueurs au-dessus du plan horizontal *BE* qui les sépare, soient respectivement h & h'. Pour que les deux liqueurs soient en équilibre, il suffit qu'un point quelconque m pris dans le plan *BE* soit également pressé par l'une & par l'autre : or c'est ce qui arrive quand les pesanteurs spécifiques sont en raison inverse des hauteurs $h h'$. Car la pression de la liqueur contenue dans la partie *ADB* du syphon est $p\,m\,h$ (*Num.* CCCXIX.), & celle de la liqueur contenue dans la partie *B C* est $p'\,m\,h'$. Mais puisqu'on suppose $p : p' :: h' : h$, on a $p\,h = p'\,h'$, & par conséquent $p\,m\,h = p'\,m\,h'$.

CCCXXXI.

REMARQUE. Un point m pris entre les deux liqueurs qui se touchent, ne peut en être également pressé, à moins que l'on n'ait $p\,m\,h = p'\,m\,h'$, ou $p\,h = p'h'$; c'est-à-dire, à moins que les pesanteurs spécifiques des liqueurs ne soient en raison inverse de leurs hauteurs au-dessus de ce point. De là on peut conclure que *si les deux liqueurs se font équilibre, la surface qui les sépare, sera nécessairement horizontale.* Car si l'on vouloit supposer qu'un point n de cette surface fût plus bas que le point m, d'une quantité d, sa distance aux niveaux des deux liqueurs seroit $h + d$, $h' + d$; & par conséquent, pour que les points m & n pris séparément fussent également pressés par l'une & par l'autre liqueur, il faudroit

que l'on eût $p : p' :: h' : h :: h' + d : h + d$. Donc on auroit $h(h' + d) = h'(h + d)$, ou $h = h'$ & $p = p'$. Ainſi les liqueurs ne ſeroient pas de peſanteurs ſpécifiques différentes, comme on le ſuppoſe.

Donc il eſt impoſſible que deux liqueurs différentes, contenues dans les deux branches d'un ſyphon, ſe faſſent équilibre, à moins qu'elles ne ſe touchent dans un plan horizontal, & que leurs hauteurs au-deſſus de ce plan, ne ſoient en raiſon inverſe de leurs peſanteurs ſpécifiques.

ARTICLE II.

De l'Équilibre des Fluides élaſtiques.

CCCXXXII.

SOIT un fluide élaſtique *BMNC* (*Fig.* 155.) contenu dans un vaſe *AMNE*, & abandonné à l'action libre de ſa peſanteur. Il eſt évident que ce fluide ne peut être en équilibre, à moins que la force élaſtique d'une molécule quelconque ne ſoit équivalente à la preſſion que cette molécule éprouve en tous ſens. Car la force élaſtique d'une molécule & la preſſion qu'elle ſupporte, ſont des forces contraires, qui ne peuvent ſe détruire, ſi elles ſont inégales. Et comme un corps compreſſible ſe réduit à un moindre volume, quand il eſt plus comprimé, il s'enſuit que

densité du fluide élastique sera plus grande par-tout
ı ses molécules, que nous supposons de même es-
èce, auront une pression plus considérable à soute-
ir. Nous ne traiterons ici que des fluides soumis à
ı seule action de la pesanteur naturelle.

CCCXXXIII.

Théorème. *Si la surface* BC (Fig. 155.) *d'un luide élastique est de niveau, chacune des tranches iorizontales, infiniment minces, dont on le peut oncevoir composé, aura la même densité dans toute on étendue.*

Car 1° la première tranche *BCcb* étant composée de molécules, qu'on suppose homogènes & également compressibles, il est évident que la pesanteur agit sur toutes également, & que l'une ne doit pas être plus comprimée que l'autre. Donc cette tranche aura par-tout la même densité.

2° Chaque point de la seconde tranche sera pressé par le poids d'un filet vertical de la première, & par conséquent la seconde tranche supportera la même pression dans toute son étendue. Donc aussi sa densité sera par-tout la même.

3° On conclura la même chose pour l'une quelconque des tranches suivantes, en observant qu'elle doit toujours être également pressée dans tous ses points par une force égale au poids d'un filet vertical, qui iroit de cette tranche jusqu'au niveau.

CCCXXXIV.

COROLLAIRE I. *Un fluide élastique* BMNC (Fig. 155.) *contenu dans un vase, & abandonné à l'action libre de sa pesanteur, est en équilibre, si sa surface supérieure est horizontale, & que la force élastique de chaque molécule soit égale à la pression qu'elle supporte.*

Il est visible, en effet, que chaque tranche horizontale ayant la même densité dans toute son étendue (*Num.* CCCXXXIII.), on peut appliquer aux fluides élastiques la démonstration donnée pour les fluides incompressibles (*Num.* CCCXV.).

CCCXXXV.

COROLLAIRE II. *Réciproquement un fluide élastique ne peut être en équilibre, à moins que sa surface ne soit de niveau.*

La démonstration est la même que pour les fluides incompressibles (*Num.* CCCXVII.).

CCCXXXVI.

COROLLAIRE III. On démontrera encore pour les fluides élastiques, comme on a démontré pour ceux qui ne le sont pas, qu'un point quelconque des parois du vase, est pressé par le poids d'un filet vertical qui iroit de ce point au niveau; qu'un élément de dimensions infiniment petites, pris dans les parois, est pressé par le poids absolu d'un prisme fluide

qui auroit cet élément pour base & sa distance au niveau pour hauteur; que par conséquent la somme des pressions perpendiculaires supportées par une partie quelconque des parois, est égale à la somme des poids d'une infinité de prismes fluides, dont chacun auroit pour base l'un de ces éléments, & pour hauteur la distance de cet élément au plan de niveau; enfin que si l'on décompose chacune des pressions perpendiculaires aux parois du vase, en deux forces, l'une dans le sens vertical, l'autre dans le sens horizontal, les forces verticales auront une résultante égale au poids du fluide, & que les forces horizontales se détruiront mutuellement.

Dans les fluides incompressibles, on trouve aisément le poids d'un prisme quelconque, en multipliant son volume par la pesanteur spécifique. Mais il est plus difficile de déterminer le poids d'un prisme dans les fluides élastiques, parce que leur densité augmente avec la distance au niveau. Si l'on pouvoit assigner la densité en un point quelconque du prisme fluide, ou, ce qui revient au même, si l'on connoissoit la loi suivant laquelle cette densité varie, on pourroit, à l'aide de la Géométrie & du Calcul, trouver & sommer les poids de toutes les tranches horizontales infiniment minces, qu'on peut imaginer dans le prisme, ce qui donneroit son poids absolu; & même, ce qui ne seroit pas moins important, on pourroit déterminer la hauteur du fluide élastique,

d'après la preſſion qu'il exerce. (Voyez le *Traité des Fluides* de M. d'Alembert, & *l'Hydrodynamique* de M. l'Abbé Boſſut.). Mais on n'a pu repréſenter juſqu'ici la loi des denſités dans les différentes tranches du fluide, que par des hypothèſes ſouvent précaires & toujours un peu incertaines. C'eſt pourquoi les théories fondées ſur ces hypothèſes peuvent rarement être appliquées à la pratique.

Au reſte, ſi l'on n'a pour objet que de trouver la preſſion d'un fluide élaſtique, on peut recourir immédiatement à l'expérience. Ayant trouvé par cette voie la preſſion qu'il exerce ſur une ſurface horizontale donnée, on conclura, par une ſimple proportion, celle qu'il exercera contre toute autre ſurface horizontale, ou même verticale, ou inclinée, en ſuppoſant que ſa denſité demeure la même ou ſenſiblement la même dans tous les cas. Ainſi, connoiſſant par l'expérience que proche la ſurface de la terre, la preſſion de l'air ſur un plan d'un pied quarré eſt équivalente à peu près au poids de 32 pieds cubes d'eau, ou à 2240 livres, on trouvera que ſa preſſion ſur une ſurface de 12 pieds quarrés ſera environ de 26880 livres.

CCCXXXVII.

COROLLAIRE IV. *Le fond horizontal* MN *d'un vaſe priſmatique* (Fig. 156.) *eſt preſſé par le poids abſolu du fluide élaſtique* BMNC *que ce vaſe contient.*

Car chaque point du fond eſt preſſé par le poids d'un filet vertical qui iroit de ce point au niveau. Or il eſt viſible que les poids des filets correſpondants à tous les points du fond, donnent le poids abſolu du fluide élaſtique. Donc, &c.

Ainſi dans un vaſe priſmatique, le fond horizontal eſt autant preſſé par le fluide élaſtique, qu'il le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort. Car ſi le fluide eût été incompreſſible, ſa denſité eût été par-tout la même que dans ſa tranche ſupérieure, & par conſéquent il ſe ſeroit élevé à une plus grande hauteur dans le vaſe, mais ſans changer de poids abſolu. Or le fond horizontal des vaſes priſmatiques eſt preſſé par le poids abſolu des fluides qu'ils contiennent (*Num.* CCCXX.): donc le fluide élaſtique exerce la même preſſion, que s'il étoit ſans reſſort.

CCCXXXVIII.

COROLLAIRE V. *Le fond horizontal* MN (*Fig.* 157.) *d'un vaſe qui va en diminuant de largeur de haut en bas, eſt plus preſſé par le fluide élaſtique* BMNC, *qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.*

Pour le démontrer, j'imagine un vaſe priſmatique (*Fig.* 158.) dont le fond ſoit égal à celui du vaſe propoſé (*Fig.* 157.), & je ſuppoſe que les deux vaſes contiennent des fluides élaſtiques *BMNC* de même eſpèce & de même hauteur. Les fonds *MN*

feront également preffés. Je prends, à diftances égales des plans de niveau BC, deux tranches $FGZX$, $fgzx$ de même épaiffeur infiniment petite hi. Leur pefanteur fpécifique p fera la même. J'obferve encore que fi les fluides n'euffent pas été compreffibles, ils auroient confervé dans toute leur étendue la même denfité qu'ils ont dans la tranche fupérieure $BCcb$. Ils fe feroient donc élevés dans les deux vafes au-deffus de BC, jufqu'à des plans AE, par exemple; & les deux tranches $FGZX$, $fgzx$ placées au-deffus de l'endroit qu'elles occupent, auroient pu former des tranches $F'G'Z'X'$, $f'g'z'x'$, dont la pefanteur fpécifique p' feroit celle des fluides fuppofés fans reffort, & dont les épaiffeurs infiniment petites feroient $H'I'$, $h'i'$.

Cela pofé, nous aurions évidemment $p \times FG \times hi = p' \times F'G' \times H'I'$, & $p \times fg \times hi = p' \times f'g' \times h'i'$. La première de ces équations donne $p : p' :: F'G' \times H'I' : FG \times hi$; la feconde donne pareillement $p : p' :: f'g' \times h'i' : fg \times hi$. Dans ces proportions, la première raifon eft la même; donc on aura $F'G' \times H'I' : f'g' \times h'i' :: FG \times hi : fg \times hi$. Divifant les deux antécédents par $F'G'$, les deux conféquents par $f'g'$, & les deux termes de la feconde raifon par hi, il reftera $H'I' : h'i' :: \frac{FG}{F'G'} . \frac{fg}{f'g'}$, ou plus fimplement $H'I' : h'i' :: 1 : \frac{fg}{f'g'}$, à caufe de

$FG = F'G'$. Or il eſt évident que le conſéquent de la ſeconde raiſon eſt plus petit que ſon antécédent, puiſque $fg < f'g'$. Donc auſſi $h'i'$ eſt moindre que $H'I'$; d'où il ſuit que le fluide ſuppoſé ſans reſſort dans le vaſe qui va en ſe rétréciſſant de haut en bas, auroit une moindre hauteur que le fluide ſuppoſé ſans reſſort dans le vaſe priſmatique. (Car on peut appliquer à toutes les tranches correſpondantes le même raiſonnement qu'aux tranches *FGZX*, *fgzx*). Donc le fond ſeroit moins preſſé dans le premier de ces vaſes que dans le ſecond: or dans celui-ci il eſt preſſé par le fluide ſuppoſé ſans reſſort, comme l'un ou l'autre fond étoient preſſés par le fluide élaſtique. Donc enfin le fond du vaſe qui va en ſe rétréciſſant de haut en bas, eſt plus preſſé par le fluide élaſtique, qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.

CCCXXXIX.

COROLLAIRE VI. *Le fond* MN (Fig. 159.) *d'un vaſe qui va en augmentant de largeur de haut en bas, eſt moins preſſé par le fluide élaſtique* BMNC, *qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.*

Pour le démontrer, il ſuffit toujours de comparer le vaſe dont il s'agit, avec un vaſe priſmatique de même baſe (*Fig.* 158.), qui contiendroit un fluide élaſtique de même eſpèce & de même hauteur. Prenant alors les tranches correſpondantes *FGZX*,

$fgzx$, qui, par la dilatation des fluides, deviennent $F'G'Z'X'$, $f'g'z'x'$; & faisant les mêmes raisonnements que dans le corollaire précédent, nous trouverons encore $H'I' : h'i' :: 1 : \frac{fg}{f'g'}$, ou $H'I' : h'i' :: f'g' : fg$. Or $f'g'$ est ici moindre que fg, & par conséquent l'épaisseur $H'I'$ des tranches supposées sans ressort dans le vase prismatique, est moindre que l'épaisseur $h'i'$ des tranches correspondantes supposées sans ressort dans l'autre vase. Donc le fluide supposé sans ressort dans le vase prismatique auroit moins de hauteur, & presseroit le fond horizontal avec moins de force, que le fluide supposé sans ressort dans le vase qui va en s'élargissant de haut en bas. Or, que le fluide contenu dans le premier de ces vases soit élastique, ou qu'il soit sans ressort, sa pression demeure la même (*Num.* CCCXXXVII.). Elle est toujours égale à celle que le fluide élastique exerce sur le fond de l'autre vase. Donc le fond de celui-ci est moins pressé par le fluide élastique *BMNC*, qu'il ne le seroit par le même fluide supposé sans ressort.

CCCXL.

REMARQUE. Si le vase prismatique *AMNE* (*Fig.* 156.), rempli d'un fluide à ressort parfait, avoit dans sa partie supérieure un fond mobile *AE*, qu'une force quelconque fît descendre jusqu'en *BC*, il est évident 1° que cette force se distribueroit

'galement à toutes les colonnes du fluide; 2° que e fluide réagiroit contre le fond mobile, & qu'il le epousseroit, la pression extérieure étant supprimée, vec la même force qui l'avoit amené de *AE* en *BC*.

ARTICLE III.

De l'Équilibre des Fluides avec les Solides qui y sont plongés.

CCCXLI.

SUPPOSONS que *AMNE* (*Fig.* 151.), au lieu 'être un vase rempli de liqueur, soit un corps uelconque plongé dans un fluide incompressible. est évident que chaque élément de sa surface sera ressé perpendiculairement par une force égale au oids d'un prisme fluide, qui auroit cet élément our base & sa distance au niveau pour hauteur. es pressions agissent du dehors au dedans du corps, peuvent se décomposer chacune en deux forces, une verticale & l'autre horizontale. On nomme *oussée du fluide*, l'effort résultant de toutes les ressions que supporte le corps.

CCCXLII.

THÉORÈME. *La poussée d'un fluide est toujours ne force verticale équivalente au poids du volume e fluide que le corps plongé déplace, & dirigée de as en haut par le centre de gravité de ce volume.*

Suppoſons en effet, que toutes les preſſions perpendiculaires ſoient décompoſées en forces verticales & horizontales.

1° Les forces horizontales ſe détruiront mutuellement, comme dans les preſſions contre les parois des vaſes. La démonſtration eſt exactement la même dans les deux cas (*Num.* CCCXXVII.).

2° Concevons le volume du corps *AMNE* (*Fig.* 151) comme décompoſé en priſmes tronqués & verticaux, de groſſeur infiniment petite, tels que $abb'a'c'd'dc$, dont les baſes $abb'a'$, $cdd'c'$ ſoient des éléments de la ſurface de ce corps. Ces deux baſes auront la même projection $uxyz$ ſur le plan de niveau *XZ*. Nommons s cette projection, h ſa diſtance à l'élément $abb'a'$, h' ſa diſtance à l'élément $cdd'c'$, & p la peſanteur ſpécifique du fluide. Le premier de ces éléments ſera pouſſé en bas par une force verticale psh (*Num.* CCCXXV.); le ſecond ſera pouſſé en haut par une force verticale psh'; & la réſultante de ces deux forces dirigées de bas en haut ſera $psh' - psh = ps(h' - h)$. Or cette dernière quantité eſt le poids abſolu d'un priſme fluide qui auroit pour baſe la projection s, & pour hauteur la diſtance $h' - h$, qui ſe trouve entre les deux éléments $abb'a'$, $cdd'c'$; priſme dont le volume ne différeroit qu'infiniment peu de $abb'a'c'd'dc$. Donc, en raiſonnant de même ſur tous les priſmes verticaux dont le volume du corps

est composé, on trouvera que les forces qui le poussent verticalement de bas en haut, sont représentées par les poids d'une infinité de prismes fluides, qui pris ensemble auroient précisément le même volume que le fluide déplacé. Donc la résultante de ces forces, ou la poussée du fluide, est égale au poids du volume de fluide, dont le corps plongé tient la place.

Il nous reste à démontrer que cette résultante passe toujours par le centre de gravité du même volume de fluide déplacé. Or cela est évident. Car si le corps *AMNE* avoit dans toute son étendue la même densité que le fluide, la résultante des poids de tous les prismes verticaux dont il est composé, passeroit évidemment par le centre de gravité de ce corps. Donc, puisque les forces verticales que donnent les pressions du fluide, sont égales & diamétralement opposées aux poids qu'auroient ces prismes verticaux, leur résultante ou la poussée du fluide sera toujours dirigée par le centre de gravité du volume *AMNE* que le corps occupe.

Si le corps *AMNE* (*Fig.* 160) n'étoit plongé qu'en partie, on démontreroit de même, que la poussée du fluide seroit égale au poids du volume *AMN* du fluide déplacé, & qu'elle passeroit par le centre de gravité *g* de ce volume.

CCCXLIII.

Corollaire I. *Pour qu'un corps plongé librement dans un fluide y soit en équilibre, il faut*

1° *que ſon poids ſoit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace; 2° que ſon centre de gravité & celui du volume de fluide déplacé, ſoient ſitués dans une même ligne verticale.*

Car, ſi la première de ces conditions n'avoit pas lieu, le poids du corps n'égaleroit pas & par conſéquent ne pourroit pas contrebalancer la pouſſée du fluide. Si la ſeconde condition n'avoit pas lieu, la pouſſée du fluide ne ſeroit pas directement oppoſée au poids du corps. Donc elles ſont néceſſaires l'une & l'autre pour l'équilibre.

La détermination des différents mouvements que le corps prendroit, ſi ces conditions n'avoient pas lieu, eſt un des problèmes les plus importants & les plus difficiles qu'on puiſſe traiter dans l'Hydrodynamique. Les ſolutions qu'en ont données les Géomètres de notre ſiècle, ſont d'un ordre bien ſupérieur à la partie élémentaire de cette ſcience. C'eſt pourquoi, me propoſant uniquement d'expoſer ce qu'il y a de plus facile dans les loix de l'équilibre des fluides, je ſuppoſerai toujours, dans les corollaires ſuivants, que le poids du corps & l'effort du fluide agiſſent dans la même ligne verticale.

CCCXLIV.

Corollaire II. En nommant V le volume du corps plongé dans le fluide, p ſa peſanteur ſpécifique, V' le volume du fluide déplacé, p' ſa pe-

eur spécifique, le poids du corps sera toujours rimée par $p\,V$, & la poussée du fluide par $p'V'$ um. CCCVII.). Pour que le corps soit en équie, il faudra donc seulement que l'on ait $p\,V$ $p'\,V'$.

Donc 1° *un corps quelconque entièrement plongé is un endroit quelconque d'un fluide, sera en ilibre, s'il a une pesanteur spécifique uniforme, le à celle du fluide.* Car alors on aura $p = p'$ $V = V'$. Donc on aura $p\,V = p'V'$.

Donc 2° *un corps abandonné à lui-même & ifiquement moins pesant que le fluide, ne peut en équilibre, à moins qu'il ne surnage en tie.* Car alors p étant plus petit que p', on ne t avoir l'équation $p\,V = p'V'$, à moins que V soit plus grand que V', c'est-à-dire, à moins le volume du corps ne soit plus grand que celui fluide qu'il déplace. Par conséquent un corps de e espèce enfoncé entièrement dans le fluide, ne rroit manquer de s'élever; puisque la poussée V' du fluide seroit plus grande que le poids du ps.

Donc 3° *un corps solide abandonné à lui-même spécifiquement plus pesant que le fluide dans uel il est plongé, ne peut jamais être en équire.* Car p étant plus grand que p', on ne pourroit ir l'équation $p\,V = 'Vp'$, qu'en supposant V s petit que V'. Or c'est ce qu'on ne peut pas

ſuppoſer, puiſqu'un corps ne peut jamais déplacer dans le fluide un plus grand volume que le ſien. Il arrivera donc néceſſairement que le poids $p\,V$ du corps ſera plus grand que la pouſſée $p'\,V'$ du fluide; & par conſequent le corps deſcendra juſqu'au fond du vaſe, à moins qu'il ne ſoit ſoutenu par quelque force étrangère.

CCCXLV.

COROLLAIRE III. *Un corps plongé dans un fluide, y perd une partie de ſon poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

Car le poids du corps étant $p\,V$, & la pouſſée du fluide $p'\,V'$, il eſt viſible qu'après l'immerſion le corps n'eſt ſollicité à deſcendre que par une force $p\,V - p'V'$. Donc il perd une partie $p'V'$, qui eſt préciſément le poids du fluide déplacé.

Si le corps eſt entièrement enfoncé dans le fluide, on aura $V = V'$. Donc le corps ſolide perdra une partie $p'\,V$ de ſon poids, qui ſera ce que pèſe une maſſe fluide de même volume que le corps.

CCCXLVI.

COROLLAIRE IV. *La peſanteur ſpécifique d'un corps qui s'enfonce entièrement dans un fluide, eſt à la peſanteur ſpécifique de ce fluide, comme le poids abſolu de ce corps eſt à la partie qu'il en perd dans le fluide.*

Car $p : p' :: p\,V : p'V$.

Si

Si l'on fait changer de place aux moyens, on aura $p : pV :: p' : p'V$.

CCCXLVII.

COROLLAIRE V. *Les pesanteurs spécifiques de deux corps fluides sont entr'elles, comme les parties qu'un corps solide plongé successivement dans l'un & dans l'autre, y perd de son poids.*

Car en nommant toujours V le volume du corps solide, p sa pesanteur spécifique, p' celle du premier fluide, p'' celle du second, on aura comme dans le corollaire précédent $p : pV :: p' : p'V$, & $p : pV :: p'' : p''V$. Donc $p' : p'V :: p'' : p''V$, ou $p' : p'' :: p'V : p''V$. Or $p'V$ est ce que le corps solide perd de son poids dans le premier fluide; $p''V$ est ce qu'il en perd dans le second. Donc, &c.

CCCXLVIII.

COROLLAIRE VI. *Les pesanteurs spécifiques de deux corps solides qui ont le même poids absolu l'un & l'autre, sont réciproquement proportionnelles aux parties qu'ils perdent de leurs poids, quand on les plonge dans le même fluide.*

Car en nommant V le volume du premier corps, p sa pesanteur spécifique, v le volume du second, P sa pesanteur spécifique, p' celle du fluide, nous aurons $p : pV :: p' : p'V$, & $P : Pv :: p' : p'v$. Or les poids pV & Pv des deux corps étant égaux par l'hypothèse, les moyens de ces deux proportions

ſeront les mêmes ; donc les produits des extrêmes ſeront égaux ; c'eſt-à-dire qu'on aura $p \times p'V = P \times p'v$, équation d'où l'on tire $p : P :: p'v : p'V$. Donc la peſanteur ſpécifique p du premier corps eſt à la peſanteur ſpécifique P du ſecond, comme $p'v$, poids que perd le ſecond, eſt à $p'V$, poids que perd le premier.

CCCXLIX.

Corollaire VII. Suppoſons à préſent un corps dont la peſanteur ſpécifique p ſoit moindre que la peſanteur ſpécifique p' du fluide ſur lequel il ſurnage librement. Soit V le volume du corps ſolide, V' celui du fluide déplacé ou de la partie du corps plongée dans le fluide. Nous aurons $pV = p'V'$ (*Num.* CCCXLIV.), équation qui donne $p : p' :: V' : V$. *Donc la peſanteur ſpécifique du corps ſera à celle du fluide, comme la partie du corps plongée dans le fluide eſt au volume total du même corps.*

Donc 1°, des quatre quantités p, p', V, V', trois étant connues, on trouve aiſément la quatrième.

Donc 2°, connoiſſant la peſanteur ſpécifique p' du fluide & le poids pV du corps, on trouvera toujours le volume V' de la partie enfoncée : & réciproquement connoiſſant le volume V' de la partie du corps enfoncée, & la peſanteur ſpécifique p' du fluide, on connoît le poids total pV du corps.

CCCL.

COROLLAIRE VIII. *Si l'on attache (Fig. 161.) à un corps B spécifiquement plus léger que le fluide AMNE, un autre corps C spécifiquement plus pesant que le même fluide, & que la somme des poids des deux corps soit plus grande que la somme des poids des fluides qu'ils peuvent déplacer, le système descendra jusqu'à ce que le plus pesant de ces corps touche le fond du vase, à moins que ce système ne soit soutenu par une force étrangère.*

Car en nommant V le volume du corps B, p sa pesanteur spécifique, v le volume du corps C, P sa pesanteur spécifique, p' celle du fluide; les poids des deux corps seront pV, Pv, & les efforts opposés du fluide seront $p'V$, $p'v$, quantités qui expriment les poids des volumes de fluide déplacés. Donc si la somme $pV + Pv$ est plus grande que la somme $p'V + p'v$, le système sera tiré vers le fond du vase par une force $pV + Pv - p'V - p'v$. Donc le corps descendra, à moins qu'il ne soit soutenu par une force $F = pV + Pv - p'V - p'v$.

On tire de cette équation $p'V = pV + Pv - p'v - F$.

CCCLI.

COROLLAIRE IX. *Un système de deux corps B & C l'un plus léger & l'autre plus pesant que le fluide, étant entièrement enfoncé & soutenu en équilibre au moyen d'une force F, la pesanteur spéci-*

fique p *du corps le plus léger* B *est à celle du fluide, comme le poids de ce corps* B *est à la somme des poids des deux corps plongés dans le fluide, moins le poids que perd le plus pesant & la force qui soutient le système.*

En effet, concevant toutes les dénominations données dans le corollaire précédent, il est visible que $p : p' :: pV : p'V$. Or $p'V = pV + Pv - p'v - F$ (*Num.* CCCL.). Donc $p : p' :: pV : pV + Pv - p'v - F$.

CCCLII.

CorollaIre X. *Les pesanteurs spécifiques de deux corps solides, sont en raison directe des nombres qui expriment le rapport de la pesanteur spécifique du premier à celle d'un fluide quelconque, & en raison inverse des nombres qui expriment le rapport de la pesanteur spécifique du second à celle du même fluide.*

Car, soit p la pesanteur spécifique du premier corps solide, P celle du second, p' celle du fluide; & supposons que p & p' soient comme les nombres a, b, & que P & p' soient comme les nombres m & n. Nous aurons $p = \frac{p'a}{b}$, & $P = \frac{p'm}{n}$. Donc $p : P :: \frac{p'a}{b} : \frac{p'm}{n} :: \frac{a}{m} : \frac{b}{n}$. Or les fractions qui forment la dernière raison, sont directement comme les numérateurs, & réciproquement comme les dénominateurs.

Appliquons la théorie précédente à la solution de quelques problèmes.

CCCLIII.

Problème I. *Déterminer dans quel rapport sont entr'elles les pesanteurs spécifiques de différents corps solides ou fluides.*

Solution. Pour résoudre ce problême, on fait usage de la balance hydrostatique, c'est-à-dire, d'une balance dont chaque bassin porte un petit crochet tournant, auquel on peut attacher un corps solide, au moyen d'un crin, d'un cheveu, ou d'un fil très-délié.

1° Si vous voulez comparer ensemble les pesanteurs spécifiques de deux fluides, prenez un corps solide spécifiquement plus dense que ces fluides, & suspendez-le à l'un des bassins de la balance, pour en connoître le poids absolu. Plongez-le ensuite dans les fluides, & voyez ce que l'immersion dans l'un & l'autre, lui fait perdre de son poids. La pesanteur spécifique du premier fluide sera à celle du second, comme le poids perdu dans le premier est au poids perdu dans le second (*Num.* CCCXLVII).

2° S'agit-il de trouver comment sont entr'elles les pesanteurs spécifiques d'un corps solide & d'un fluide ? Si le corps est spécifiquement plus pesant que le fluide, voyez, au moyen de la balance hydrostatique, ce qu'il perd de son poids, quand il est

poids d'argent. On soupçonna la fraude, & comme on ne vouloit pas gâter un ouvrage qui étoit d'ailleurs d'un travail exquis, Archimède *fut consulté sur le moyen de découvrir la quantité d'argent, substituée à l'or. On sait qu'il réussit à résoudre le problème, mais on ne connoît pas précisément la méthode qu'il suivit. On demande comment il pouvoit le résoudre par les principes de l'Hydrostatique.*

SOLUTION. Il est évident que si l'on prend deux morceaux d'une même matière, par exemple, deux lingots d'or ou d'argent, & qu'on les plonge dans un même fluide, il perdront des parties de leurs poids proportionnelles à ces poids. Car ils perdront des parties équivalentes aux poussées du fluide, & les poussées du fluide sont proportionnelles aux volumes des corps qu'on y plonge. Or quand deux corps sont de même espèce, leurs volumes sont comme leurs poids (*Num.* CCCVII.). Donc les poids que les deux corps perdront par l'immersion seront proportionnels aux poids absolus.

Cela posé, soient respectivement a, b, c les poids d'un lingot d'or, d'un lingot d'argent & de la couronne proposée; a', b', c' ce que ces corps perdent de leurs poids, quand on les plonge dans le fluide; x le poids de la quantité d'or qui entre dans la couronne, y le poids de l'argent qu'on a allié avec cet or. Nous aurons d'abord l'équation $x + y = c$.

Ensuite le poids a du lingot d'or est à la quantité d'or x qui entre dans le mélange, comme le poids a' que le lingot perd dans le fluide est à ce que la quantité x peut y perdre. Cette quantité perdra donc une partie de son poids exprimée par $\frac{a'x}{a}$. De même le poids b du lingot d'argent est à la quantité d'argent y qui entre dans l'alliage, comme le poids b' que le lingot d'argent perd dans le fluide est au poids que la quantité y doit y perdre. Cette quantité y perdra donc une partie de son poids exprimée par $\frac{b'y}{b}$. Or, si l'on ajoute ensemble ce que l'or & l'argent qui entrent dans le mélange doivent perdre de leurs poids, on aura ce que la couronne perd du sien, c'est-à-dire, $\frac{a'x}{a}+\frac{b'y}{b}=c'$; équation qui comparée avec $x+y=c$, fera trouver les valeurs de x & de y.

Avant de passer à l'Hydraulique, je ferai encore ici les deux remarques suivantes.

CCCLVI.

REMARQUE I. D'après ce que nous avons dit sur l'Hydrostatique, on peut conclure que dans un fluide en équilibre, une molécule quelconque est pressée suivant toutes les directions par des forces égales. Cette propriété générale des fluides est ce qu'on appelle *le principe de l'égalité de pression en*

tous sens. Elle est le fondement des plus savantes théories que les Géomètres aient données sur les fluides. On peut voir dans l'*Essai sur la résistance des Fluides*, par M. *d'Alembert*, page 13 & suiv., comment on déduit de l'égalité de pression en tous sens, quelques autres principes dont on a fait aussi beaucoup d'applications.

CCCLVII.

REMARQUE II. J'ai considéré les fluides comme doués d'une parfaite fluidité. Cependant, physiquement parlant, il n'y a point de fluides dont les parties ne soient adhérentes les unes aux autres, avec une certaine force qui n'est pas la même dans tous, & qui peut varier dans un même fluide par le chaud, par le froid, ou par d'autres causes physiques. Nous avons sans cesse sous les yeux des preuves de cette adhérence. Si l'on jette de l'eau sur un plancher, les molécules en s'éparpillant, ont de la peine à se séparer : lorsqu'on laisse tomber un fluide goutte à goutte, on voit que les parties forment une espèce de filet plus ou moins sensible : plusieurs globules de mercure qui viennent à se toucher, s'unissent ensemble, & paroissent ne plus former qu'un même tout, &c. Quelle que soit la cause de cette adhérence, on conçoit qu'elle peut, dans certains cas, contribuer à entretenir l'équilibre dans les fluides, malgré l'inégalité de pression, pourvu que cette inégalité soit peu considérable.

CHAPITRE II.

DE L'HYDRAULIQUE.

Les écoulements des liqueurs par des ouvertures proposées, le mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la nature, les forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, la meilleure manière d'employer l'action de ces fluides pour mouvoir les machines, &c., sont des objets dont la connoissance peut s'appliquer très-fréquemment aux besoins de la société. Mais autant l'Hydraulique est utile, autant elle est difficile à traiter. Ce n'est presque jamais qu'en employant le calcul infinitésimal, que l'on parvient dans cette partie à démontrer rigoureusement les propositions même qu'on regarde comme les plus simples; & les plus grands Géomètres de notre siècle, qui semblent avoir épuisé toutes les ressources de l'analyse pour se diriger dans leurs recherches, ont trouvé des résultats si composés par la nature de la chose, que l'on ne peut guères les considérer que comme des vérités géométriques, très-précieuses en elles-mêmes, & non comme des symboles propres à peindre l'image sensible du mouvement actuel & physique d'un fluide. Heureusement qu'on peut tirer, dans la pratique,

à peu près les mêmes avantages des méthodes approchées, que de celles qui feroient absolument exactes. En multipliant donc les expériences, en les analysant avec attention, en les ramenant autant qu'il est possible à des loix générales, on a composé une espèce de théorie dépourvue, à la vérité, de la rigueur géométrique, mais simple, lumineuse & usuelle. Je vais en donner une idée, en exposant ce qu'il y a de plus facile à comprendre sur l'écoulement des fluides qui sortent de leurs réservoirs par de petits orifices, sur le mouvement des eaux jaillissantes, sur la percussion & la résistance des fluides, & sur la réfraction des corps solides qui passent d'un milieu dans un autre.

ARTICLE PREMIER.

De l'Écoulement des Fluides qui sortent de leurs réservoirs par des orifices. *

CCCLVIII.

SOIT un vase cylindrique de verre *ABCD* (*Fig.* 162.) de 5 $\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, rempli d'eau à la hauteur de 16 pouces au-dessus du fond. Que l'on permette l'écoulement par un ajutage horizontal *M*

---

* Cet article sur l'écoulement des fluides, & le suivant sur les jets d'eau, ne sont presque qu'un extrait de l'excellent *Traité d'Hydrodynamique* de M. l'Abbé *Bossut*.

: quatre lignes de diamètre, & qu'en même tems
ı entretienne le vase constamment plein à la hau-
ur proposée, en y versant aussi légérement qu'il
: possible, de l'eau avec une cruche. On observera
e des corpuscules étrangers, comme de la limaille,
s morceaux d'ardoise pilée, &c, mêlés dans l'eau,
dirigent vers l'orifice. Ils descendent d'abord
ivant des directions verticales. Mais lorsqu'ils sont
rvenus à la distance de trois ou quatre pouces du
nd, ils se détournent visiblement de cette direc-
on, & viennent de tous côtés, suivant des mou-
ments plus ou moins obliques, gagner l'orifice,

La même expérience répétée avec d'autres aju-
ges, donne les mêmes résultats à peu près.

Il en est de même, lorsque l'eau sort par une ou-
rture latérale *N* (*Fig.* 163.). Toutes les particules
t aussi une tendance vers l'orifice.

Cette tendance universelle des particules fluides
rs l'orifice, est une suite nécessaire de leur parfaite
obilité. Car il est évident qu'elles doivent se diri-
r vers le point qui résiste le moins aux forces dont
es sont pressées, sous une profondeur déterminée.
: l'endroit de l'orifice est ce point de la moindre
listance. Donc, &c.

CCCLIX.

SI après avoir rempli le vase *ADCB* (*Fig.* 162.)
ı hauteur de 16 pouces, on permet l'écoulement

par un orifice de 4 lignes de diamètre, sans fournir de nouvelle eau, la surface du fluide en s'abaissant demeure horizontale jusqu'à la distance d'environ 6 lignes de l'orifice. A cette hauteur, il se forme à la surface une espèce de petit *entonnoir* creux, dont la pointe répond au centre de l'orifice. La cavité de cet entonnoir s'agrandit de plus en plus; & vers la fin de l'écoulement l'eau glisse sur l'arête de l'ouverture en forme de *nappe*.

La même expérience répétée avec un ajutage de 8 lignes, donne les mêmes résultats. Seulement il paroît que l'entonnoir commence à se former à un peu moins de 6 lignes de distance à l'orifice.

Lorsque le vase se vuide par une ouverture verticale *N* (*Fig.* 163), la surface de l'eau demeure sensiblement horizontale, tant qu'elle a une certaine hauteur au-dessus de l'orifice. Mais quand elle est prête d'en toucher le bord supérieur, on la voit s'incliner un peu de ce côté. Il se forme en longueur un petit enfoncement dans la direction de l'orifice. Cette espèce de demi-entonnoir n'est pourtant pas, à beaucoup près, si sensible que dans les écoulements par des orifices horizontaux.

Tandis que l'eau a une certaine profondeur, sa surface demeure sensiblement horizontale, parce que les particules inférieures pressées par les supérieures, sont portées rapidement dans la direction de l'écoulement, entraînent de proche en proche

les particules contiguës, en vertu de leur ténacité réciproque, & remplacent ainsi le fluide qui sort. Le parallélisme de la surface est donc alors à peu près le même que si le fluide étoit en repos. Mais à mesure que la surface de l'eau s'abaisse, les particules inférieures sont moins pressées, se succèdent les unes aux autres avec moins de promptitude; & l'entonnoir devient sensible. Dans les écoulements par des orifices horizontaux, la pression de l'air tend à l'agrandissement de l'entonnoir. En effet, l'atmosphère presse par son poids la surface de l'eau. La colonne verticale d'air qui répond à l'orifice, s'insinue dans le petit creux ou entonnoir qui se forme dans le même endroit. Cette colonne seroit contre-balancée par l'effort contraire de la colonne d'air placée au-dessous de l'orifice, si celle-ci déployoit librement toute son action Mais comme l'eau en tombant repousse l'air & détruit une petite partie de sa réaction, la première colonne doit l'emporter un peu sur la seconde. D'où l'on voit que si les particules qui accourent de tous côtés vers l'orifice pour fournir à l'écoulement, n'ont pas assez de vîtesse pour empêcher l'effet de cette inégalité de pression des deux colonnes dont on vient de parler, l'entonnoir s'agrandira; & qu'il s'agrandira d'autant plus, que la surface de l'eau s'abaissera davantage, & que par conséquent les vîtesses des particules diminueront.

L'enfoncement ou le demi-entonnoir eſt moins ſenſible dans les écoulements par des orifices verticaux, parce que l'action de l'air eſt appliquée différemment, & que les molécules inférieures qui tendent à l'orifice en ſe portant de bas en haut, ſoulèvent un peu la ſurface dans l'endroit où elle s'abaiſſe.

CCCLX.

THÉORÈME I. *Dans un réſervoir* ABCD (Fig. 164), *la vîteſſe du fluide au ſortir de l'orifice, eſt à la vîteſſe d'une tranche horizontale* TVvt, *comme l'une des baſes de cette tranche eſt à l'aire de l'orifice.*

En effet, ſuppoſons qu'il ſorte par l'orifice un priſme de fluide $rsli$, dans l'inſtant que la tranche $TVvt$ deſcend de p en q: il eſt évident que le priſme $rsli$ ſera égal en ſolidité à la tranche $TVvt$, ou, ſi l'on aime mieux, à un priſme qui auroit TV pour baſe & pq pour hauteur. Donc, en nommant a l'aire rs de l'orifice, A la baſe TV, nous aurons $a \times sl = A \times pq$; d'où l'on tirera $sl : pq :: A : a$. Or sl & pq ſont comme les vîteſſes du fluide à l'orifice & dans la tranche $TVvt$. Donc la vîteſſe du fluide qui ſort par l'orifice, eſt à la vîteſſe d'une tranche horizontale, comme l'une des baſes de cette tranche eſt à l'aire de l'orifice.

Dans cette démonſtration, l'on ſuppoſe la tranche $TVvt$ infiniment mince.

CCCLXI.

CCCLXI.

THÉORÈME II. *Les volumes fluides qui sortent dans le même tems de deux réservoirs, dans chacun desquels le fluide est constamment entretenu à la même hauteur, sont en raison composée des aires des orifices & des vîtesses des veines fluides.*

Car il est évident que les volumes dont il s'agit, sont d'autant plus considérables, que les orifices sont plus grands & que les fluides sortent avec plus de vîtesse.

CCCLXII.

THÉORÈME. III. *La vîtesse d'un fluide qui sort d'un vase par un orifice infiniment petit, est égale à celle que doit acquérir un corps pesant, en descendant librement de la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice.*

En effet, quand l'orifice est infiniment petit, les différentes tranches horizontales qu'on peut imaginer dans le réservoir, ont une vîtesse infiniment moindre que celle de la veine fluide qui sort par l'orifice. Par conséquent, on peut regarder comme nulle la vîtesse des particules fluides contenues dans le réservoir, & la veine fluide comme chargée & pressée par tout le poids d'une colonne qui iroit de l'orifice à la surface supérieure du fluide.

Soient donc rs (*Fig.* 165) l'orifice infiniment petit par où sort le fluide, $rsli$ le petit prisme qui s'écoule pendant un tems t infiniment petit, $hfst$

la colonne verticale dont le poids chasse la veine fluide. En nommant p la pesanteur spécifique du fluide, V sa vîtesse au sortir de l'orifice, on aura $p \times fs \times rs$ pour l'expression du poids de $hfsr$ ou de la force motrice, & $rsli \times V$ pour le mouvement produit par cette force.

Supposons à présent un prisme infiniment petit $rsnm$, qui, en vertu de son poids, doive descendre précisément de sa hauteur pendant le tems t, & acquérir une vîtesse v. La force motrice ou le poids de ce prisme sera $p \times sn \times rs$, & le mouvement produit sera $rsnm \times v$. Or les forces motrices étant comme les mouvements produits, nous aurons $p \times fs \times rs : p \times sn \times rs :: rsli \times V : rsnm \times v$.

On peut diviser les deux termes de la première raison par $p \times rs$, & substituer dans la seconde, au lieu du rapport de $rsli$ à $rsnm$, celui de V à v. Car les prismes $rsli$, $rsnm$ ayant même base, sont comme les hauteurs sl, sn; & ces hauteurs qui sont les espaces parcourus en même tems, sont comme les vîtesses V & v. Donc la proportion précédente se réduit à $fs : sn :: V^2 : v^2$.

Comparant enfin le prisme $rsnm$ avec un corps pesant qui tomberoit librement de la hauteur fs, nommant V' la vîtesse que ce corps acquerroit, nous aurions $fs : sn :: V'^2 : v^2$ (*Num.* CLXV.). Donc $V^2 : v^2 :: V'^2 : v^2$, & par conséquent $V = V'$. Donc la vîtesse du fluide, au sortir de l'orifice, est

égale à celle d'un corps pesant qui seroit tombé librement de la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice.

CCCLXIII.

COROLLAIRE I. *Les vîtesses des fluides qui sortent par des orifices infiniment petits de deux vases dans lesquels ils ont des hauteurs différentes, sont comme les racines quarrées de ces hauteurs.*

Car ces vîtesses sont égales à celles de deux corps pesants qui seroient tombés librement des hauteurs des deux fluides au-dessus des orifices. Or les vîtesses de ces deux corps seroient entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs dont il s'agit, (*Num.* CLXV.). Donc, &c.

CCCLXIV.

COROLLAIRE II. *Pendant qu'un corps pesant tomberoit de toute la hauteur* fs (Fig. 165.), *la veine fluide conservant toujours la vîtesse qu'elle reçoit à l'orifice, parcourroit un espace double de cette hauteur.*

En effet, le corps pesant, constamment animé de sa vîtesse finale, parcourroit un espace double de *fs* (*Num.* 162.), dans le même tems qu'il a employé à parcourir cette ligne. Or le fluide sort du vase avec une vîtesse égale à la vîtesse finale du corps pesant qui seroit tombé de la hauteur *fs* du fluide. Donc, &c.

CCCLXV.

Remarque I. La démonstration du théorème III suppose que le fluide au sortir de l'orifice, soit pressé par le poids entier de la colonne supérieure; ce qui arrive effectivement, quand cet orifice est infiniment petit, puisqu'alors la colonne correspondante est entièrement soutenue & perd toute sa vîtesse. Mais si l'orifice est de grandeur finie, la colonne supérieure n'a plus une vîtesse infiniment petite par rapport à celle du fluide qui sort, & par conséquent on ne peut pas conclure que l'écoulement se fasse avec une vîtesse due à la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice. Cette proposition, prise généralement, seroit même évidemment fausse. Car si l'on a, par exemple, un vase cylindrique vertical rempli d'eau, & qu'on imagine que tout d'un coup le fond soit anéanti, la tranche du fond ne souffrira aucune action des tranches supérieures, & elles descendront toutes avec la même vîtesse, suivant les loix de la chute des corps pesants.

Il est cependant essentiel de remarquer, que si un orifice horizontal, quoique fini, est petit en comparaison de la largeur du réservoir; que, par exemple, le rapport de la première surface à la seconde n'excède guères celui de 1 à 20, la vîtesse du fluide à la sortie de l'orifice, est sensiblement la même que si cet orifice étoit infiniment petit. Mais alors cette vîtesse n'est pas produite toute entière par la pression

de la colonne supérieure. Chaque particule obéit à la fois à sa pesanteur propre & à l'action des particules contiguës; action qui est sans cesse favorisée ou contredite par leur adhérence réciproque. La veine fluide reçoit ainsi sa vîtesse & de la colonne verticale & des colonnes latérales, qui tendent toutes vers l'orifice. Or on conçoit, sans qu'il soit peut-être possible de le démontrer en rigueur, que toutes ces forces peuvent tellement se combiner entr'elles, que la vîtesse de la liqueur au sortir de l'orifice, soit la même, que si elle étoit produite par le poids de la colonne supérieure. La chose est du moins indubitable par l'expérience. Car on observe que dans les jets d'eau, le fluide s'élève presqu'à la hauteur des réservoirs, quoiqu'il soit retardé par différentes causes, telles que la résistance de l'air, le frottement contre le contour de l'ajutage, le poids des molécules supérieures qui retombent sur les suivantes, &c.; ce qui prouve que la vîtesse de la veine fluide est sensiblement la même, que celle d'un corps qui tomberoit de la hauteur des réservoirs. Seulement l'expérience apprend que si l'orifice est un peu considérable, la vîtesse n'acquiert sa plénitude uniforme & permanente qu'au bout d'un certain tems; car on trouve alors que la quantité de liqueur qui sort pendant les 3 ou 4 premières secondes de l'écoulement, est un peu moindre que celle qui sort pendant 3 ou 4 autres secondes de la suite du tems,

& plus l'orifice eſt grand, plus cette inégalité ſe fait appercevoir.

CCCLXVI.

REMARQUE II. Si la veine fluide ſortoit ſous la forme d'une colonne parfaitement cylindrique ou priſmatique, on pourroit conclure que la quantité de liqueur écoulée pendant un tems quelconque *T* ſeroit équivalente à un priſme qui auroit pour baſe l'aire *a* de l'orifice, & pour hauteur l'eſpace *VT* qu'un corps animé de la vîteſſe *V* du fluide, au ſortir de l'orifice, parcourroit uniformément pendant le tems *T*; c'eſt-à-dire, que la dépenſe du réſervoir ſeroit expimée par le produit *aVT*. C'eſt cette quantité qu'on a appelée la dépenſe naturelle du réſervoir.

Mais on obſerve que la veine fluide en ſortant ſe reſſerre depuis la face intérieure du fond juſqu'à une diſtance à peu près égale au rayon de l'orifice, & qu'enſuite elle augmente de groſſeur & va en ſe dilatant de plus en plus. Si l'on meſure la ſection de la veine fluide à l'endroit où la contraction eſt la plus grande, on trouve qu'elle eſt toujours à l'aire de l'orifice, à peu près comme 2 eſt à 3. Le fluide ſe contracte ſenſiblement de la même manière, quand il ſort par un orifice vertical pratiqué dans les parois du vaſe.

Cette contraction eſt une ſuite néceſſaire de la tendance univerſelle des molécules fluides vers l'orifice;

En effet les colonnes latérales, qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, ne peuvent y arriver qu'en suivant des directions obliques. Ainsi une partie de leur mouvement doit s'employer à presser & à resserrer la veine fluide. Quand ensuite cette veine est parvenue au point de la plus grande contraction, la résistance de l'air doit nécessairement la dilater & lui donner plus de volume.

Les molécules fluides employant, comme nous venons de le dire, une partie de leur mouvement à se comprimer en passant par l'orifice, l'effet de la contraction est de diminuer la dépense des réservoirs. M. l'Abbé *Bossut* a trouvé par des expériences faites avec le plus grand soin, que la quantité de fluide qui sort réellement d'un réservoir, est à celle qui s'écouleroit si la contraction de la veine fluide n'avoit pas lieu, à peu près comme 5 est à 8, ou plus exactement encore comme 100 est à 161,57.

CCCLXVII.

REMARQUE III. Si l'on adapte aux orifices, des bouts de tuyaux cylindriques assez longs pour que l'eau en suive les parois & sorte à gueule bée, la dépense est plus grande que si l'écoulement se faisoit par de simples orifices. Le Savant que nous venons de citer, a trouvé que la dépense par des tuyaux additionnels, étoit à la dépense naturelle, à peu près comme 13 à 16. Il faut donc que les tuyaux

additionnels diminuent en partie la contraction de la veine fluide ; & l'on peut rendre raison de cet effet, en observant que la veine fluide se dilatant, après être parvenue au point où elle est le plus resserrée, rencontre bientôt les parois du tuyau ; ce qui doit occasionner un frottement qui diminue la vîtesse du fluide. Or cette vîtesse devenant moindre, la veine fluide doit grossir un peu dans l'endroit où elle avoit été le plus resserrée, & l'obliquité des colonne qui entrent dans le tuyau doit un peu diminuer. Donc les mouvements de ces colonnes deviendront moins opposés, & par conséquent le fluide s'écoulera plus librement.

On voit pourtant que les tuyaux additionnels n'empêchent pas entièrement la contraction de la veine fluide ; puisque la dépense effective par ces tuyaux est moindre que la dépense naturelle.

Si les tuyaux adaptés aux orifices sont trop courts pour être rencontrés par le fluide après sa contraction, la liqueur sortira comme par de simples orifices.

CCCLXVIII.

PROBLÈME I. *Trouver une équation qui exprime le rapport entre la dépense d'un réservoir, le tems que dure l'écoulement, la hauteur constante du fluide & le petit orifice horizontal par lequel sort la veine fluide.*

SOLUTION. Soit V la vîtesse de la veine fluide

fortir de l'orifice, T le tems de l'écoulement, l'aire de l'orifice, s la hauteur conftante de la ...eur au-deffus du même orifice, p la vîteffe ac-...e à la fin d'une feconde par un corps pefant qui ...mbe librement, & D la dépenfe du réfervoir. Il s'agit de la dépenfe naturelle & théorique, nous ...rons $D = aVT$ (*Num.* CCCLXVI.). Or la ...teffe V étant due à la hauteur s, on a $V = \sqrt{2ps}$ (N. CLXXII.). Donc, en fubftituant cette valeur ... V, on aura l'équation cherchée $D = aT\sqrt{2ps}$.

Mais quand le fluide fort par un petit orifice, la ...penfe naturelle du réfervoir eft à la dépenfe effec-...ve, à peu près comme 5 à 8. Donc, en nommant ...' la dépenfe effective, on aura $D' = \frac{5}{8}aT\sqrt{2ps}$.

De même, fi le fluide fort à gueule bée par un ...yau additionnel, la dépenfe naturelle eft à la dé-...enfe effective, comme 13 eft à 16 à très-peu près. ...onc, en nommant D'' la dépenfe effective, on ...ra $D'' = \frac{13}{16}aT\sqrt{2ps}$.

Soit, par exemple, la hauteur conftante du fluide $= 12$ pieds $= 144$ pouces; que l'orifice horizon-...al pratiqué au fond du réfervoir, foit un cercle ...'un pouce de diamètre; fon aire fera $a = \frac{355}{452}$. ...uppofons que l'écoulement ait duré pendant une ...inute; la durée T fera de 60 fecondes, parce que ...ous évaluons le tems en fecondes: enfin rappelons-

nous que $p = 30,2$ pieds $= 362,4$ pouces. En substituant ces valeurs dans les formules précédentes, nous trouverons la dépense naturelle $D = 15223$ pouces cubiques à peu près, & la dépense effective $D' = 9514$ pouces cubiques.

On auroit trouvé plus exactement la dépense effective D', en supposant qu'elle est à la dépense naturelle, comme 100 est à 161,57.

Si le fluide sortoit par un tuyau additionnel d'un pouce de diamètre, on trouveroit $D'' = 12368$ pouces cubiques à très-peu près.

Quand le fluide s'écoule par un orifice vertical très-petit, on peut déterminer les dépenses par la même méthode.

CCCLXIX.

COROLLAIRE. *Les dépenses naturelles de deux réservoirs dans chacun desquels le fluide est entretenu à une hauteur constante, sont entr'elles en raison composée des aires des orifices, des tems pendant lesquels se fait l'écoulement, & des racines quarrées des hauteurs des fluides au-dessus des orifices.*

Car, en nommant a, T, s l'orifice du premier réservoir, la durée de son écoulement & la hauteur du fluide au-dessus de son orifice; a', T', s' les quantités correspondantes dans le second réservoir, & p la vîtesse acquise à la fin d'une seconde; les dépenses naturelles des deux réservoirs seront $aT\sqrt{2ps}$,

$a'T'\sqrt{2ps'}$. Or la premiere de ces quantités est à la seconde, comme $aT\sqrt{s}$ est à $a'T'\sqrt{s'}$.

Les dépenses effectives par de simples orifices sont aussi dans le même rapport. Car

$\frac{5}{8} aT\sqrt{2ps} : \frac{5}{8} a'T'\sqrt{2ps'} :: aT\sqrt{s} : a'T'\sqrt{s'}$.

On peut dire la même chose des dépenses effectives par des tuyaux additionnels. Car

$\frac{13}{16} aT\sqrt{2ps} : \frac{13}{16} a'T'\sqrt{2ps'} :: aT\sqrt{s} : a'T'\sqrt{s'}$.

CCCLXX.

PROBLÈME II. *Connoissant le petit orifice* a (Fig. 166.), *& la hauteur* AB *d'un réservoir* ABCL *constamment rempli de fluide, & traversé par un diaphragme* IG *percé d'une petite ouverture* b, *on demande les hauteurs dues aux vîtesses en* b *& en* a, *& la quantité de liqueur qui passera en un tems donné par chacune de ces ouvertures.*

SOLUTION. 1° Il est clair que l'écoulement naturel de l'eau *AIGL* par le trou *b* étant empêché par la résistance de l'eau inférieure, l'eau sort par *b* de la même maniere qu'elle sortiroit par un orifice latéral *G* égal à *b*, si elle communiquoit par là avec l'eau *EFGH* d'un réservoir latéral dont la hauteur *EG* exprimât la résistance que chaque point de l'eau en *b* éprouve de la part de l'eau inférieure. D'où il suit que la vîtesse en *b* est due à la hauteur *L E*.

2° Comme la réaction est toujours égale & contraire à l'action, la partie d'eau *IGCB* est comprimée

en tous ſes points par l'eau ſupérieure, avec une force proportionnelle à EG. Ainſi la hauteur due à la vîteſſe en a eſt EC.

Cela poſé, nommant T le tems de l'écoulement, D la dépenſe par l'un ou l'autre des orifices b & a, s la hauteur donnée AB, x la hauteur LE due à la vîteſſe en b, y la hauteur EC due à la vîteſſe en a, & p la vîteſſe qu'un corps peſant acquiert en tombant librement pendant une ſeconde; nous aurons (*N.* CCCLXVIII.), $D = bT\sqrt{2px}$, $D = aT\sqrt{2py}$, & $x + y = s$. Ces équations comparées enſemble donnent $x = \frac{a^2 s}{a^2+b^2}$, $y = \frac{b^2 s}{a^2+b^2}$ & $D = \frac{abT\sqrt{2ps}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

CCCLXXI.

COROLLAIRE. On voit par la ſeconde de ces formules, que la hauteur y due à la vîteſſe de la veine fluide au ſortir de l'orifice a, eſt moindre que la hauteur s du réſervoir. Donc *la veine fluide perdra toujours de ſa vîteſſe, s'il ſe trouve quelqu'étranglement dans le réſervoir ou dans les tuyaux où le fluide eſt contenu.*

CCCLXXII.

PROBLÈME III. *Le vaſe* ABCD (Fig. 167.) *étant ſuppoſé priſmatique, & l'écoulement ſe faiſant par un petit orifice* a, *on demande le tems que la ſurface de la liqueur mettra à s'abaiſſer de* AD *en*

EF, dans le cas où l'on ne fournira point de nouvelle eau pour entretenir cette surface à la même hauteur.

SOLUTION. Puisque l'orifice est très-petit par rapport à l'amplitude du vase, on pourra considérer à chaque instant la vîtesse de la veine fluide comme due à la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice.

Cela posé, imaginons qu'un corps non pesant soit poussé de bas en haut suivant la verticale ah par une force accélératrice constante, qui lui imprime les mêmes degrés de vîtesses que la pesanteur imprime à un corps qui tombe librement; de manière que le corps ascendant parcoure l'espace ah, suivant la même loi & dans le même tems que le corps descendant par la pesanteur parcourroit l'espace ha. Concevons la ligne ef infiniment proche de EF, & nommons s la hauteur ha, s' la hauteur ma, p la vîtesse acquise à la fin d'une seconde en vertu de la pesanteur, x le tems que le corps ascendant mettroit à parcourir mn. La vîtesse qu'auroit ce corps parvenu en m seroit $\sqrt{2ps'}$, celle qu'il auroit en k seroit $\sqrt{2ps}$, & le tems employé à parcourir ah ou s seroit $\sqrt{\frac{2s}{p}}$ (*Num.* CLXXII.).

La vîtesse $\sqrt{2ps'}$ qu'a le corps en m, ne changeant qu'infiniment peu de m en n, on peut la regarder comme uniforme pendant le tems x; donc puisque le tems dans le mouvement uniforme est égal

à l'espace divisé par la vîtesse, on aura $x = \frac{mn}{\sqrt{2ps'}}$. Mais pendant le tems T que la surface du fluide met à descendre de n en m, on a $aT\sqrt{2ps'}$ pour la dépense du réservoir, & cette dépense est évidemment égale au prisme $EFfe$, ou, ce qui est la même chose, au produit $mn \times A$, en nommant A la base EF de ce prisme. Ainsi on a l'équation $aT\sqrt{2ps'} = mn \times A$, d'où l'on tire $T = \frac{mn \times A}{a\sqrt{2ps'}}$. Donc

$$x : T :: \frac{mn}{\sqrt{2ps'}} : \frac{mn \times A}{a\sqrt{2ps'}} :: a : A.$$

Le même rapport ayant lieu entre les autres tems élémentaires que le corps ascendant & la surface de l'eau emploient à parcourir de petits espaces égaux, on conclura que le tems total que le corps ascendant emploie à parcourir la hauteur ah, est au tems total que le vase met à se vuider, comme l'aire a de l'orifice est à l'aire A de la base EF ou BC. Nommant donc T' le tems que le vase met à se vuider entièrement, nous aurons $\sqrt{\frac{2s}{p}} : T' :: a : A$. Donc $T' = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2s}{p}}$.

Par un raisonnement semblable, on trouvera que pour descendre de EF jusqu'à BC, la liqueur emploie un tems $T'' = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2s'}{p}}$. Or si l'on retranche T'' de T', on aura le tems que la surface de la li-

queur emploie à s'abaiſſer de *AD* en *EF*. Donc, en appelant ce tems t, on aura $t = \frac{A}{a}\left(\sqrt{\frac{2s}{p}} - \sqrt{\frac{2s'}{p}}\right)$; c'eſt ce qu'il falloit trouver.

On voit qu'au moyen de cette équation, on déterminera toujours l'une quelconque des cinq quantités A, a, t, s, s', quand on connoîtra les quatre autres.

ARTICLE II.

Du Mouvement des Eaux jailliſſantes.

CCCLXXIII.

Il faut diſtinguer trois choſes dans les jets d'eau; 1° le *réſervoir ADCB* (*Fig.* 168.) où ſont aſſemblées les eaux qui doivent fournir à l'écoulement; 2° le *tuyau de conduite GEO* qui les amène du réſervoir à l'endroit où elles doivent jaillir; 3° l'orifice par lequel le jet ſort, & qu'on nomme ordinairement l'*ajutage*.

Les jets dirigés verticalement de bas en haut, s'élèveroient à la hauteur entière de leurs réſervoirs, ſi rien ne les en empêchoit. Mais le frottement contre le circuit de l'orifice, la réſiſtance que l'air oppoſe à la colonne jailliſſante, & le poids des particules fluides qui, après s'être élevées auſſi haut qu'elles peuvent, retombent ſur les ſuivantes, ſont autant de cauſes qui diminuent un peu l'élévation.

des jets. On conçoit cependant que les gros jets doivent s'élever plus haut que les petits. En effet, de deux jets qui sortent avec des vîtesses égales de leurs ajutages, le plus gros a plus de masse & par conséquent plus de force que le petit, pour vaincre les obstacles opposés.

CCCLXXIV.

POUR mieux connoître les différentes circonstances qui peuvent concourir à la hauteur plus ou moins considérable des jets d'eau, il est à propos de voir d'abord ce que l'expérience nous apprend en général sur cette matière.

Soit donc un réservoir *ADCB* (*Fig.* 169.) parallélipipédal, rectangle & vertical, dont la hauteur soit d'environ 12 pieds, & dont la base soit un quarré de 3 pieds sur chaque côté mesuré en dedans. Qu'on adapte horizontalement à ce vase un tuyau *OE* de fer-blanc, fermé par le bout *E* & ouvert du côté du réservoir. Que le diamètre de ce tuyau soit de 3 pouces 8 lignes. Soient en *F*, *G*, *H* trois ajutages circulaires dont les diamètres soient respectivement de 2, de 4 & de 8 lignes. Je suppose de plus en *K* un tuyau conique *KM* dont la hauteur soit de 5 pouces 10 lignes, le diamètre de la base inférieure de 9 lignes, & celui de la base supérieure de 4 lignes. Enfin qu'il y ait en *I* un tuyau cylindrique haut de 5 pouces 10 lignes, & dont le diamètre soit de 4 lignes. L'eau étant entretenue dans le

le réservoir à la hauteur constante de 11 pieds au-dessus de la paroi supérieure *OE* du tuyau, on trouve d'après les expériences de M. l'Abbé *Bossut*, les résultats suivants.

1° Le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 10 lignes. La colonne forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 4 pouces 6 lignes.

2° Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 5 pouces 10 lignes. La colonne ne s'élargit pas beaucoup par en haut; elle forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 7 pouces 6 lignes.

3° Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 6 pouces 6 lignes. Dans tous les jets, l'eau fait des bonds qui ne sont pas de la même hauteur. Ils sont plus sensibles ici que dans les deux exemples précédents. La colonne s'élargit beaucoup par en haut. En inclinant un peu le jet, il s'élève presque à la hauteur de 10 pieds 8 pouces, & la colonne se déforme moins que quand il est exactement vertical.

4° Le jet vertical par le tuyau conique *KM*, s'élève à 9 pieds 6 pouces 4 lignes. La colonne est fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 9 pieds 8 pouces 6 lignes.

5° Le jet vertical par le tuyau cylindrique *IN*, s'élève à 7 pieds 1 pouce 6 lignes. La colonne est

fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à [illegible] pieds 3 pouces 6 lignes.

6° Au lieu du tuyau *OE* (*Fig.* 169), que l'on adapte au même réservoir un tuyau *OE* (*Fig.* 170), de même longueur que le premier, mais dont le diamètre ne soit que de 9 ou 10 lignes, & dans lequel on ait percé trois orifices circulaires *F*, *G*, *H*, dont les diamètres soient respectivement de 2, de 4 & de 8 lignes. L'eau étant entretenue, comme dans les expériences précédentes, à la hauteur de 11 pieds au-dessus de la paroi supérieure du tuyau, le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 11 pouces. La colonne est belle.

7° Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 7 pouces 10 lignes. La colonne se déforme beaucoup, & la gerbe en haut est fort élargie.

8° Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, ne s'élève guères qu'à 7 pieds 10 pouces. La colonne s'éparpille extrêmement, & n'est formée, pour ainsi dire, que de jets détachés qui se succèdent les uns aux autres.

CCCLXXV.

VOICI les conclusions que l'on peut tirer de ces expériences.

1° On voit par les trois premières, que si le

tuyau de conduite fournit les eaux avec une abondance suffisante, les gros jets s'élèvent plus haut que les petits.

2° Si le tuyau de conduite est trop étroit, les jets s'élèvent plus haut par un petit que par un grand ajutage. C'est ce qu'on trouve par les trois dernières expériences.

3° Souvent on fait les ajutages en forme de cônes ou de cylindres saillants d'une certaine hauteur au-dessus de la souche. Cet usage est très-vicieux. La 4e & la 5e expérience apprennent que ces ajutages font perdre aux jets beaucoup de leur hauteur, & qu'en particulier les ajutages cylindriques sont les plus mauvais de tous. Les ajutages qui procurent le plus d'élévation à l'eau, sont ceux qui sont percés dans la platine horizontale qui ferme l'extrémité du tuyau. Il faut que cette platine soit bien polie, mince, d'une épaisseur uniforme, & percée perpendiculairement.

4° Les jets qui se détournent un peu de la direction verticale, s'élèvent un peu plus haut que les jets rigoureusement verticaux, par la raison que les molécules fluides ayant monté dans le premier cas aussi haut qu'elle peuvent, ne retombent pas directement sur les suivantes. Il y a donc quelque chose à gagner du côté de l'élévation du jet, en lui donnant une petite inclinaison. Mais, d'un autre côté, il ne produit pas un effet aussi agréable aux

yeux, que lorſque la gerbe retombe perpendiculairement ſur elle-même.

5° Enfin, il ſuit des expériences précédentes, que pour donner aux jets la plus grande hauteur poſſible, l'ajutage ne doit être ni trop grand ni trop petit relativement au tuyau de conduite. Car nous voyons que dans les trois premières expériences, les ajutages *F* & *G* ſont trop petits, & ne donnent pas un jet auſſi haut que l'ajutage *H* dont le diamètre eſt plus grand. Au contraire, nous voyons dans les trois dernières expériences, que les ajutages *G* & *H* ſont trop grands par rapport au tuyau de conduite, & qu'ils donnent des jets moins élevés que l'ajutage *F*, dont le diamètre eſt plus petit. Donc, pour avoir la plus grande hauteur poſſible du jet, il faut proportionner le tuyau de conduite à l'ajutage.

CCCLXXVI.

PROBLÈME. *Dans les jets d'eau, connoiſſant la hauteur du réſervoir & le diamètre du tuyau de conduite, déterminer le diamètre qu'on doit donner à l'ajutage, afin que le jet s'élève à la plus grande hauteur poſſible.*

SOLUTION. Soit *h* la hauteur du réſervoir exprimée en pieds, *D* le diamètre du tuyau de conduite, *d* celui de l'ajutage, *D* & *d* étant exprimés en lignes. Faites la proportion ſuivante,

$28\frac{1}{2} : \frac{12}{\sqrt[4]{h}} :: D : d$. Par l'hypothèse on connoît les trois premiers termes. Donc on trouvera le diamètre d qu'il faut donner à l'ajutage.

Pour comprendre la raison de cette règle, il faut observer que si le jet ne s'élève pas à toute la hauteur possible quand l'ajutage est trop grand, c'est parce que l'eau contenue dans le tuyau de conduite a trop de vîtesse pour presser de tout son poids la veine fluide qui sort par l'orifice. En effet, la partie du poids employée à mouvoir le fluide au dedans du tuyau, ne chasse pas la colonne qui sort. C'est ainsi que nous avons remarqué (*Num.* CCCLXV.), que le fluide qui s'écoule d'un vase, n'est poussé par tout le poids de la colonne supérieure, que dans le cas où l'orifice est très-petit par rapport à la grandeur du vase; ce qui rend la vîtesse des différentes tranches, prises dans le vase, très-peu considérable par rapport à la vîtesse de la veine fluide.

Quelle que soit donc la plus grande vîtesse que l'eau contenue dans un tuyau de conduite puisse avoir sans cesser d'agir sur le jet avec une force équivalente à son poids tout entier, je l'appellerai v, & je nommerai V la vîtesse du jet, au sortir de l'ajutage. La première de ces vîtesses sera à la seconde, comme l'aire de l'ajutage est à une section circulaire du tuyau de conduite (*Num.* CCCLX.), ou comme d^2 est à

D^2, puiſque les cercles ſont proportionnels aux quarrés de leurs diamètres. Donc on aura $v = \frac{Vd^2}{D^2}$.

Suppoſant à préſent un autre jet également fourni, dans lequel la hauteur du réſervoir fut h', le diamètre du tuyau de conduite D', le diamètre de l'ajutage d' & V' la viteſſe du jet, on trouveroit de même la viteſſe $v = \frac{V'd'^2}{D'^2}$, ce qui donneroit l'équation $\frac{Vd^2}{D^2} = \frac{V'd'^2}{D'^2}$, ou $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2} = \frac{d'^2\sqrt{h'}}{D'^2}$, puiſque les viteſſes V & V' ſont comme les racines quarrées des hauteurs h & h' (*Num.* CCCLXIII.). Donc $D'^2 : d'^2\sqrt{h'} :: D^2 : d^2\sqrt{h}$, ou prenant les racines quarrées de tous les termes de cette proportion, $D' : d'\sqrt[4]{h'} :: D : d\sqrt[4]{h}$; ce qui nous apprend que *lorſque deux tuyaux de conduite ont préciſément la grandeur qu'ils doivent avoir pour que les jets prennent toute la hauteur poſſible, les diamètres de ces tuyaux ſont en raiſon composée des diamètres des ajutages, & des racines quatrièmes des hauteurs des réſervoirs.* Or l'expérience apprend que la hauteur du réſervoir étant de 16 pieds, & le diamètre du tuyau de conduite de $28\frac{1}{2}$ lignes, il faut donner 6 lignes de diamètre à l'ajutage, pour que le jet ait la plus grande hauteur poſſible. Subſtituant donc dans la proportion précédente, au lieu des quantités h', D', d', les nombres 16, $28\frac{1}{2}$, 6, nous aurons

$28\frac{1}{2} : 12 :: D : d\sqrt[4]{h}$, ou divisant les deux conséquents par $\sqrt[4]{h}$, $28\frac{1}{2} : \frac{12}{\sqrt[4]{h}} :: D : d$.

Pour faire une application de la règle que nous venons de démontrer, supposons que la hauteur du réservoir soit de 36 pieds, que le diamètre du tuyau de conduite soit de 40 lignes, & que l'on demande le diamètre qu'il faut donner à l'ajutage, on aura $\sqrt[4]{36} = 2{,}45$ à très-peu près, $D = 40$; & substituant ces valeurs, on trouvera $28\frac{1}{2} : \frac{12}{2{,}45} :: 48 : d = 6{,}87$ lignes. Il faudra par conséquent que l'ajutage ait presque 7 lignes pour que le jet s'élève à la plus grande hauteur possible.

CCCLXXVII.

Remarque I. Si l'on connoissoit le diamètre de l'ajutage, & que l'on demandât celui de la conduite, on le trouveroit en employant la même proportion $28\frac{1}{2} : \frac{12}{\sqrt[4]{h}} :: D : d$, dans laquèlle tout seroit connu, excepté D. Au reste, il ne peut y avoir qu'à gagner du côté de la hauteur du jet, en faisant les tuyaux de conduite plus gros que ne les demandent ces calculs; mais on ne doit pas les faire plus étroits, si l'on veut que le jet s'élève à toute la hauteur qu'on peut espérer. On doit aussi prendre garde

qu'il n'y ait aucun étranglement dans les tuyaux; autrement l'eau ne feroit pas fournie en abondance, & il s'en faudroit beaucoup que le jet ne s'élèvât à la hauteur convenable (*Num.* CCCLXXI.).

CCCLXXVIII.

REMARQUE II. Il faut éviter foigneufement qu'il ne fe trouve pas d'angle droit dans les tuyaux qu'on eft obligé de couder: car le choc du courant contre ces fortes d'angles détruit une grande partie de fa vîteffe & fatigue extrêmement la conduite. Lorfqu'on eft obligé de courber les tuyaux, il faut diftribuer la courbure fur toute la longueur, ou du moins fur un efpace bien étendu.

CCCLXXIX.

REMARQUE III. Il réfulte des expériences de M. *Mariotte*, & de celles de M. l'Abbé *Boffut*, que *les différences des hauteurs des jets verticaux aux hauteurs de leurs réfervoirs, font entr'elles fenfiblement comme les quarrés des hauteurs des jets*. Lorfqu'on connoîtra donc par une expérience la quantité dont il s'en faut qu'un jet ne s'élève à la hauteur de fon réfervoir, on trouvera par une fimple proportion la quantité dont il s'en faudra que tout autre jet de hauteur donnée ne s'élève à la hauteur du fien. On aura enfuite la hauteur du réfervoir en ajoutant à la hauteur du jet la quantité trouvée par la proportion qu'on vient d'indiquer. Pour faire ufage de

te proportion, on pourra ſuppoſer qu'un réſervoir 33 pieds de hauteur donne un jet vertical de pieds.

CCCLXXX.

REMARQUE IV. Quand le réſervoir ne peut remplir que par intervalles, il eſt utile pour l'é-bliſſement d'un jet d'eau, de connoître à peu près tems qu'il emploie à ſe vuider par un ajutage quel-nque. On ne ſe trompera pas de beaucoup en ſup-ſant que l'écoulement ſe fait comme par l'orifice un vaſe où le fluide auroit une hauteur conſtante, ;ale à la hauteur du milieu du réſervoir au-deſſus l'ajutage. Connoiſſant donc cette hauteur & la épenſe ou quantité d'eau qui doit s'écouler, on ıercherea la durée de l'écoulement par un orifice 'un pouce de diamètre, en employant la formule $Y = \frac{5}{8}\, aT\sqrt{2ps}$ trouvée (*Num.* CCCLXVIII), dans laquelle tout ſera connu, excepté le tems T: i l'on veut que le jet dure un tems 2, 3 ou 4 fois lus grand, on choiſira un ajutage dont la ſurface ɔit 2, 3 ou 4 fois plus petite que la ſurface de celui ui a un pouce de diamètre. Ayant ainſi déterminé diamètre convenable à l'ajutage, on trouvera celui u tuyau de conduite, par la règle donnée (*Num.* CCLXXVII.).



ARTICLE III.

De la Percussion & de la Résistance des Fluides.

CCCLXXXI.

THÉORÈME. *Les percussions que deux surfaces planes reçoivent de la part de deux fluides qui viennent les choquer perpendiculairement, sont à peu près en raison composée de surfaces choquées, des densités des fluides & des quarrés des vîtesses de ces fluides.*

En effet, supposons d'abord que les fluides aient la même densité & la même vîtesse : plus les surfaces choquées auront d'étendue, plus il y aura de molécules fluides qui les rencontreront. Donc les percussions seront comme les surfaces choquées.

Supposons ensuite que les surfaces choquées soient égales & que les fluides aient la même vîtesse. Plus les fluides auront de densité, plus ils auront de force pour choquer les surfaces : donc les percussions seront comme les densités des fluides.

Supposons enfin que les surfaces choquées soient égales & que les fluides aient la même densité. En nommant P & P' les percussions contre les deux surfaces, M & M' les masses de fluides qui les rencontrent dans le même tems, V & V' les vîtesses de ces fluides, il est évident que l'on aura $P : P'$

: MV : $M'V'$; proportion dans laquelle on peut ıbſtituer le rapport de V à V', au lieu de celui de M à M'. Car plus les fluides ont de vîteſſe, plus les ıaſſes qui viennent choquer les plans en même tems ɔnt conſidérables. Donc on aura $P : P' :: V^2 : V'^2$.

Donc les percuſſions perpendiculaires des fluides ontre des ſurfaces planes, ſont à peu près en raiſon ompoſée de ces ſurfaces, de la denſité des fluides t des quarrés de leurs vîteſſes.

Ainſi, en nommant F & F' les forces perpendiculaires qui agiſſent contre deux plans dont les ſurfaces ſont S & S'; nommant auſſi D & D' les denités des fluides, V & V' leurs vîteſſes, on aura à eu près $F : F' :: DSV^2 : D'S'V'^2$.

CCCLXXXII.

REMARQUE I. Cette proportion ſeroit exactement vraie, ſi chaque tranche fluide parallèle au lan frappé, s'anéantiſſoit après avoir donné ſon oup, pour permettre à la tranche ſuivante de donner ibrement le ſien. Mais il eſt viſible, que dans la ature la percuſſion ſe fait bien différemment. Les remières molécules ſont forcées de céder après le hoc & de s'écouler le long des plans, ce qui doit ccaſionner un changement dans la direction des ıolécules ſuivantes. Celles-ci, par conſéquent, ne oivent plus choquer les ſurfaces ni immédiatement i ſuivant des directions abſolument perpendicu-

laires. Cette observation fait voir l'insuffisance de la démonstration que nous venons de donner du théorème précédent. Ceux qui feront curieux d'en avoir une plus rigoureuse, pourront consulter l'*Essai sur la résistance des Fluides*, par M. *d'Alembert*. Au reste, on conçoit qu'il peut se faire que les chocs sur des surfaces différentes, soient dénaturés semblablement, & qu'ils suivent dans l'état physique à peu près la même loi, que s'ils n'éprouvoient aucun dérangement; & c'est effectivement ce qui arrive, autant qu'on peut en juger d'après les expériences faites sur cette matière. Quant à la valeur absolue de la percussion d'un fluide, on la trouve un peu moindre que le poids d'un prisme fluide, qui auroit une base égale à la surface choquée, & une hauteur double de celle qui est due à la vîtesse du fluide.

CCCLXXXIII.

REMARQUE II. Si les deux plans choqués, au lieu d'être en repos, avoient un mouvement dans le même sens que les fluides, il est évident qu'il n'y auroit de percussion qu'en vertu des différences de vîtesse dans les plans & dans les fluides. Donc, pour avoir le rapport des percussions, il faudroit entendre par V & V' les excès des vîtesses des fluides sur les vîtesses des deux plans.

Si au contraire les plans avoient un mouvement opposé à celui des fluides, il faudroit entendre par

r & *V'* les ſommes des vîteſſes des plans & des vîteſſes des fluides.

CCCLXXXIV.

REMARQUE III. Quand les plans ſont choqués obliquement par les fluides, la plûpart des Phyſiciens ſuppoſent que *les percuſſions, toutes choſes d'ailleurs égales, ſont comme les quarrés des ſinus des angles d'incidence.* Mais ce rapport eſt contredit par l'expérience, & les raiſonnements ſur leſquels il eſt fondé ne prouvent rien, à moins qu'on ne laiſſe préciſion du mouvement par lequel les premiers filets fluides s'écoulent après le choç le long des plans, & troublent la percuſſion des filets ſuivants.

A plus forte raiſon manquons-nous des connoiſſances néceſſaires pour évaluer les percuſſions des fluides contre les ſurfaces courbes. Toutes les méthodes propoſées juſqu'à préſent, ſont fondées ſur des hypothèſes dans leſquelles on néglige des éléments eſſentiels, ou ces méthodes ſont ſi compoſées, qu'il n'eſt pas poſſible d'en faire uſage dans la pratique.

CCCLXXXV.

REMARQUE IV. Si au lieu de ſuppoſer les fluides en mouvement, on les ſuppoſe en repos, & que deux ſurfaces planes viennent les choquer perpendiculairement avec des vîteſſes quelconques,

les résistances qu'opposeront les fluides, seron raison composée des densités de ces fluides, surfaces qui les divisent & des quarrés des vite de ces surfaces. Cette proposition se démontre le même raisonnement que le théorême.

En général, *la résistance qu'un fluide oppos un corps en mouvement, est égale à la percuss que le fluide mu avec la vîtesse du corps, exercer contre ce même corps supposé en repos.* Cela par évident par soi-même. M. *d'Alembert*, au surpl en a donné une démonstration rigoureuse, dans *Essai sur la résistance des Fluides.* La percussion la résistance des fluides suivent donc les mêmes l & se mesurent de la même manière.

ARTICLE IV.

De la Réfraction des Corps.

CCCLXXXVI.

On appelle *réfraction* le changement de directi qu'éprouve un corps qui passe d'un fluide dans autre plus ou moins résistant. Par exemple, si balle *A* (*Fig.* 171.) se meut dans l'air suivant ligne *AB*, & qu'elle frappe obliquement la surf de l'eau *CD*, elle n'ira point en *E*, mais ell détournera vers *F*. De même, si la balle se m dans l'eau suivant la ligne *AB*, & qu'elle tou

bliquement ſur la ſurface de l'air *CD*, elle n'ira oint directement au point *E*, ni au point *F*, mais le ſe détournera vers *G*. C'eſt ce détour dans l'un l'autre cas, que l'on nomme réfraction ; & on la iſtingue par le moyen de la perpendiculaire *BP* rée dans le nouveau milieu, du point où le corps rencontre. Si la direction du corps dans le nouau milieu paſſe entre la perpendiculaire *BP* & le olongement de la direction qu'il avoit dans le emier, on dit que la réfraction ſe fait *en s'apochant de la perpendiculaire :* mais ſi le prolonment de la direction primitive du corps paſſe tre ſa direction dans le nouveau milieu & la perndiculaire *BP*, on dit que la réfraction ſe fait *en éloignant de la perpendiculaire.* J'appellerai *plan incidence*, celui qui eſt perpendiculaire au nouau milieu, & qui paſſe par la direction du corps.

La réfraction des corps dépend de leur figure & leur direction. Ce n'eſt qu'avec le ſecours de la us ſublime Géométrie, qu'on peut ſe flatter d'en nner une théorie générale. (Voyez le *Traité des uides*, par M. *d'Alembert.*) Je me bornerai à e ici un mot de la réfraction que peuvent éprour les corps ſphériques.

CCCLXXXVII.

THÉORÈME. *Un corps ſphérique paſſant perdiculairement d'un milieu dans un autre, ne*

ſouffre point de réfraction: mais s'il y paſſe obliquement, il ſe réfracte en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, ſuivant que le nouveau milieu eſt plus ou moins réſiſtant que le premier.

Car ſuppoſons d'abord que le corps ſphérique *APB* (*Fig.* 172.) paſſant d'un milieu dans un autre plus ou moins réſiſtant, ſe meuve ſuivant la ligne *CP* perpendiculaire à la ſurface *MONS* qui ſépare les deux milieux ou fluides. Il eſt évident qu'il n'y aura point de raiſon pour qu'il s'écarte de cette ligne en un ſens plutôt qu'en tout autre; donc il ne ſe réfractera en aucun ſens.

Suppoſons enſuite que le même corps tombe obliquement dans le nouveau milieu, qu'il y ſoit enfoncé d'une quantité *MPN*, & que ſon centre vienne de décrire dans un inſtant la ligne infiniment petite *DC* ſuivant la direction *AB*. Il décriroit dans l'inſtant ſuivant une ligne égale *Cd*, s'il n'y avoit aucune réſiſtance de fluides à ſurmonter. Mais ſi le nouveau milieu dans lequel il pénètre eſt plus ou moins réſiſtant que le premier, le corps doit néceſſairement ſe détourner de ſa direction. En effet, ſoit *APB* le plan d'incidence dans lequel on mène des points *C*, *M*, *N*, les lignes *Ee*, *Mm*, *Nn* perpendiculaires à la ligne *AB*. Soit *AXBZ* une ſection du globe, perpendiculaire au plan d'incidence & qui le coupe dans la direction *AB*. Enfin par les points *m* & *n*

imaginons

imaginons une autre section *mons* aussi perpendiculaire au plan d'incidence, & parfaitement égale à *MONS.*

Cela posé, la surface comprise entre les deux cercles *MONS*, *mons* est divisée par le plan *AXBZ* en deux parties égales, semblablement disposées par rapport à la direction *AB* du centre & placées dans le même milieu. Donc ces deux parties doivent éprouver des résistances qui se contrebalancent mutuellement dans le sens perpendiculaire au plan *AXBZ*. La même surface comprise entre les contours *MONS*, *mons* est aussi divisée par le plan d'incidence en deux moitiés semblablement disposées par rapport à la ligne *AB*. Donc elles éprouvent des résistances qui doivent se contrebalancer dans le sens perpendiculaire au plan d'incidence; & par conséquent le centre, en vertu des résistances dont nous venons de parler, ne peut s'écarter ni du plan *AXBZ*, ni du plan d'incidence. Donc il ne changeroit pas de direction, s'il n'éprouvoit aucune autre action. Mais les deux parties *MONSP*, *monsp* égales & semblablement disposées autour de *AB*, éprouveront deux résistances différentes, dont chacune pourra se concevoir comme décomposée en deux forces, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la direction *AB*; & le centre du globe devra se mouvoir comme si ces forces lui étoient immédiatement appliquées

(*Num.* CCLXII.). Or les forces parallèles à *AB* altéreroient la vîteſſe du point *C*, ſans rien changer à ſa direction; au lieu que les forces perpendiculaires à *AB* ne pourroient manquer de produire un changement dans la direction du centre. Car ſi le nouveau milieu eſt plus réſiſtant que le premier, la force perpendiculaire ſuivant *Ce* ſera plus grande que la force perpendiculaire ſuivant *CE*, & par conſéquent elles auront une réſultante *Cy* dirigée ſuivant *Ce*. Donc le centre ſollicité en même tems ſuivant *Ce* & ſuivant *CB*, décrira une ligne *Cc* en s'éloignant de la perpendiculaire. Si au contraire le nouveau milieu eſt moins réſiſtant que le premier, la force ſuivant *Ce* ſera moindre que la force ſuivant *CE*, & par conſéquent ces forces auront une réſultante *Cy'* dirigée ſuivant *CE*. Donc le centre ſollicité en même tems ſuivant *CE* & ſuivant *CB*, décrira une ligne *Cc'* en s'approchant de la perpendiculaire. Donc en général le mobile ſe réfracte en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, ſuivant qu'il paſſe d'un milieu dans un autre plus ou moins réſiſtant.

CCCLXXXVIII.

REMARQUE I. La réfraction ſe fait en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, ſuivant que le nouveau milieu eſt plus ou moins réſiſtant que le premier, non ſeulement tandis que le plan d'immerſion *MONS* (*Fig.* 172.) eſt au-

dessous du point *B*, mais aussi lorsqu'il passe au-dessus de ce point (*Fig.* 173.). Car menant toujours dans le plan d'incidence les lignes *Ee*, *Mm*, *Nn*, perpendiculaires à la direction *AB* du corps, & concevant par les points *m*, *n*, une section *mOnS* perpendiculaire au plan d'incidence & évidemment égale à la section *MONS*, les résistances qu'éprouveront les parties *ONSB*, *OnSB* se contrebalanceront dans le sens perpendiculaire à la ligne *AB*, ainsi que les résistances des parties *OMAS*, *OmAS*. Mais on voit que les parties égales *OMnS*, *OmNS* placées dans des milieux différents, éprouveront des résistances inégales, qui donneront au centre *C* une impulsion suivant *Ce*, si le nouveau milieu est plus résistant; ou suivant *CE*, si le nouveau milieu est moins résistant que le premier. Donc, &c.

CCCLXXXIX.

REMARQUE II. On peut donc conclure, que si le globe éprouvoit de la résistance dans tous les points de sa surface, la réfraction dureroit pendant tout le tems qu'il seroit plongé en partie dans l'un & en partie dans l'autre milieu. Mais imaginant le globe divisé en deux moitiés par le plan *EVeY* (*Fig.* 174.) perpendiculaire à la ligne *AB*, il est visible que si la vîtesse est considérable, les milieux ou fluides n'agiront que sur l'hémisphère antérieur *EVeYB*, & qu'il se fera une espèce de vuide

derrière le corps. Donc la réfraction cessera dès que le corps sera plongé dans le nouveau milieu jusqu'au point *e*, puisqu'alors il présentera à ce milieu tout l'hémisphère antérieur, dont les résistances se balanceront dans le sens perpendiculaire à la ligne *AB*.

CCCXC.

Remarque III. Si le corps passe d'un milieu dans un autre plus résistant, l'angle *PCB* augmente pendant tout le tems que dure la réfraction, & par conséquent le point *e* avance continuellement dans le sens *eF*. Or il peut arriver 1°, que malgré la réfraction, l'angle *PCB* demeure toujours moindre qu'un angle de 90 degrés, & alors le corps doit passer entièrement dans le nouveau milieu & s'y enfoncer de plus en plus. 2° Il peut arriver qu'en vertu de la réfraction, l'angle *PCB* devienne droit à l'instant où le corps est entièrement plongé, & dans ce cas il est évident que le corps ne s'enfoncera que de la quantité précise de son diamètre, & qu'il décrira après son immersion une ligne droite parallèle à la surface des deux fluides. 3° Enfin il peut arriver que l'angle *PCB* devienne droit & que le point *e* arrive en *F* avant l'immersion totale; & dans ce dernier cas le mobile doit repasser dans le premier milieu. En effet, la réfraction n'étant pas finie, l'angle *PCB* doit aller en augmentant & devenir obtus de plus en plus; ce qui ne peut être,

à moins que le globe ne rentre dans le premier milieu. C'eſt par cette raiſon que les corps qui frappent trop obliquement la ſurface de l'eau, ſe réfléchiſſent & font des *ricochets*; que dans les batailles navalles, par exemple, les boulets ſont renvoyés par l'eau, & que la même choſe arrive aux petites pierres que les enfants jettent avec roideur ſur la ſurface d'une rivière, pour leur faire faire pluſieurs ſauts.

CCCXCI.

REMARQUE IV. La peſanteur du globe & des fluides qu'il traverſe, doit apporter quelque changement dans les loix de réfraction que nous venons d'expoſer. Mais les effets de cette peſanteur ne peuvent guères s'évaluer avec une préciſion ſuffiſante, que dans un Traité complet de la réfraction des corps.

CCCXCII.

REMARQUE V. Quoique la réſiſtance inégale des milieux doive produire un changement dans la direction du mobile qui les traverſe, il n'en faut pas conclure en général, que toute réfraction vienne de cette cauſe. On obſerve, par exemple, que la lumière ſe réfracte en s'approchant de la perpendiculaire, quand elle paſſe d'un milieu dans un autre plus denſe, de l'air dans l'eau ou dans le verre, d'un air moins denſe dans un autre plus denſe; & qu'au contraire elle s'éloigne de la perpendiculaire,

en passant d'un milieu dans un autre de moindre densité. Il résulte même des démonstrations de M. *d'Alembert*, qu'aucune des loix qu'on observe dans la réfraction de la lumière, ne doit avoir lieu dans celle des corps solides, & qu'ainsi c'est mal-à-propos qu'on a fait dépendre l'une & l'autre des mêmes principes. Voyez son *Traité des Fluides*.

FIN.

De l'Imprimerie de J.-F.-X. JOLY, Imprimeur de la Ville & du Collége de Dole.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Mgr. le Garde des ſceaux, un manuſcrit intitulé : *Leçons élémentaires de Méchanique*, par M. l'Abbé JANTET, Profeſſeur de Philoſophie au Collége royal de Dole, & je n'y ai rien trouvé qui puiſſe en empêcher l'impreſſion. A Paris le 6 décembre 1784. DÉMEUNIER.

PRIVILÉGE DU ROI.

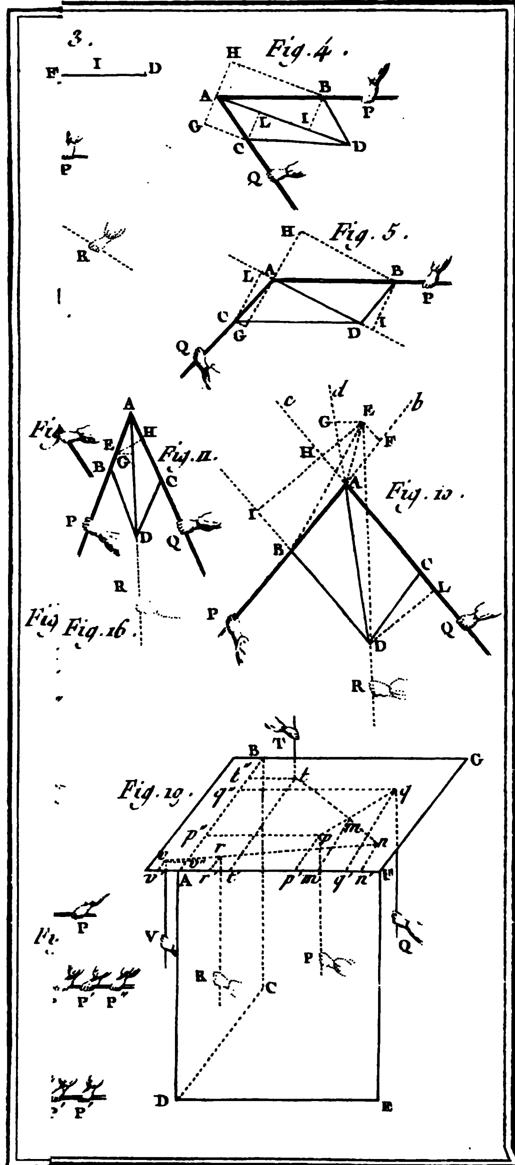
LOUIS, par la Grâce de Dieu, Roi de France & de Navarre, A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre bien amé le ſieur Abbé JANTET, Profeſſeur de Philoſophie au Collége royal de Dole, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au public les *Elémens de Méchanique* de ſa compoſition : s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, nous lui avons permis & permettons par ces préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre royaume ; Voulons qu'il jouiſſe de l'effet du préſent Privilége, pour lui & ſes hoirs à perpétuité, pourvu qu'il ne le rétrocède à perſonne : & ſi cependant il jugeoit à propos d'en faire une ceſſion, l'acte qui la contiendra ſera enregiſtré en la Chambre ſyndicale de Paris, à peine de nullité, tant du Privilége que de la Ceſſion ; & alors, par le fait ſeul de la Ceſſion enregiſtrée, la durée du préſent Privilége ſera réduite à celle de la vie de l'Expoſant, ou à celle de dix années, à compter de ce jour, ſi l'Expoſant décède avant l'expiration deſdites dix années ; le tout conformément aux articles IV & V de l'Arrêt du Conſeil du 30 août 1777, portant Règlement ſur la durée des Priviléges en Librairie. Faiſons défenſe à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangère dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de celui qui le repréſentera, à peine de ſaiſie & de confiſcation des

exemplair… …trefaits, de six mille livres d'amende, qui … pourra êt… modérée pour la première fois, de pareille amend… & de déchéance d'état en cas de récidive, & de tous dépens dommages & intérêts, conformément à l'Arrêt du Conseil d… 30 août 1777, concernant les contrefaçons : A LA CHARG… que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le regis… tre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris dans trois mois de la date d'icelle ; que l'impression dudi… Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, e… beau papier & beaux caractères, conformément aux Régle… mens de la Librairie, à peine de déchéance du présent Privi… lége ; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aur… servi de copie à l'impression dudit ouvrage sera remis dans l… même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains d… notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France le sieur HUE DE MIROMESNIL, Commandeur de nos Ordres qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Biblio… thèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chanceli… de France, le sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit sieu… HUE DE MIROMESNIL : le tout à peine de nullité des Présen… tes ; DU CONTENU desquelles vous MANDONS & enjoignon… de faire jouir ledit Exposant & ses hoirs, pleinement & paisi… blement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble o… empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui se… imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudi… Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copie… collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secré… taires foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS a… premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pou… l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans de… mander autre permission, & nonobstant clameur de Haro… Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notr… plaisir. Donné à Paris le sixième jour du mois d'avril, l'an d… grace mil sept cent quatre-vingt-cinq, & de notre Régne l… onzième. Par le Roi en son Conseil. LE BEGUE.

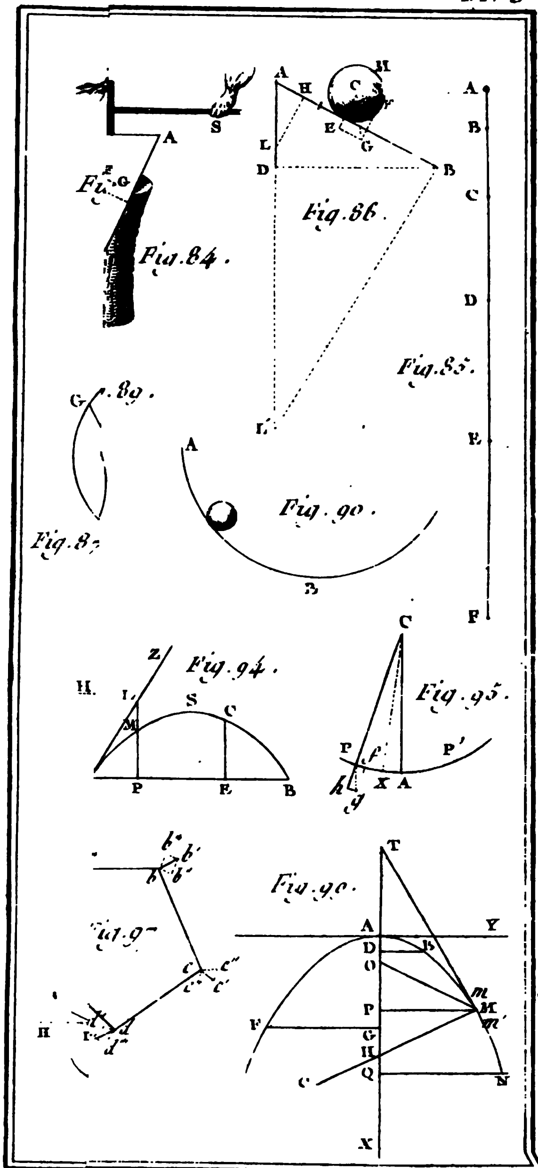
Registré sur le Registre XXII de la Chambre royale & syn… dicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n° 149, *fol.* 303 *conformément aux dispositions énoncées dans le présent Privi… lége; & à la charge de remettre à ladite Chambre les hui… Exemplaires prescrits par l'article CVIII. du règlement d…* 1723. *A Paris le* 15 *avril* 1785. *LE CLERC*, Syndic.

J'ai cédé le présent Privilége au sieur JOLY, Imprimeu… Libraire, pour en jouir conformément aux réglemens de l… Librairie. A Dole le 21 août 1785. JANTET.

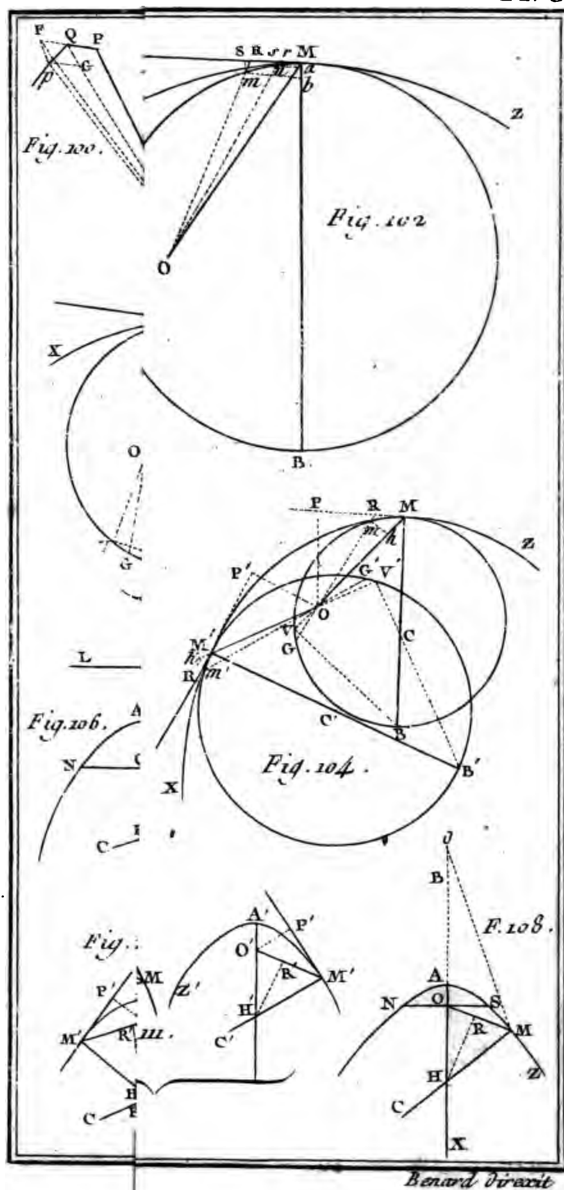
Pl. 1.



Benard direxit



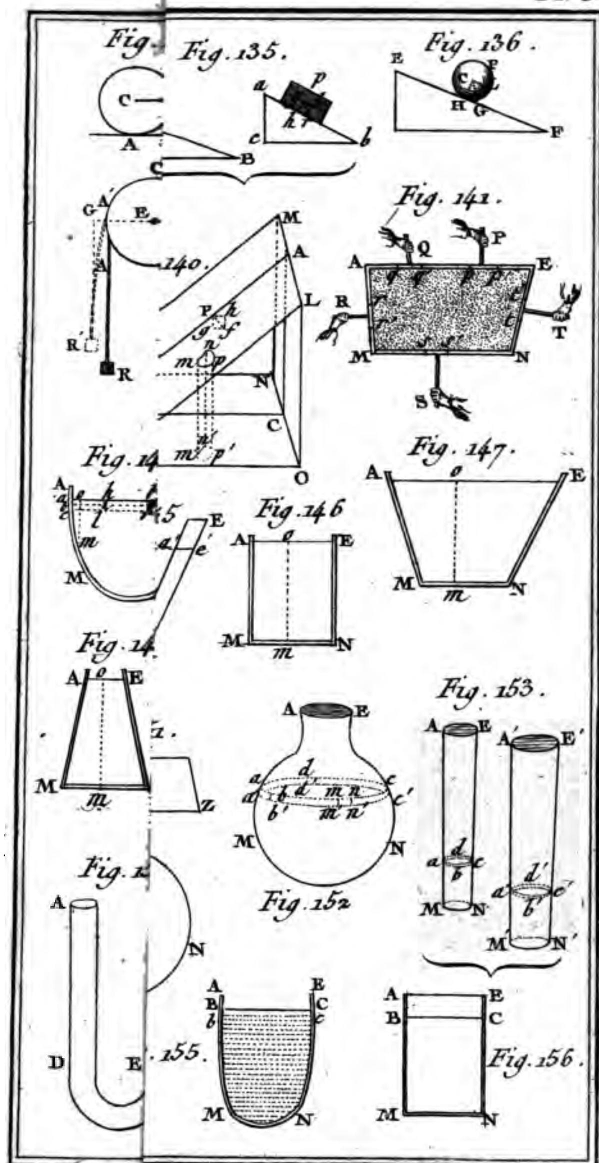
Benard direxit



Benard direxit



Pl. 8.

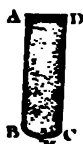


Benard direxit



Fig. 161.





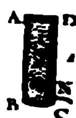


Fig. 162.

g. 166.



Fig. 167.



Fig. 170.

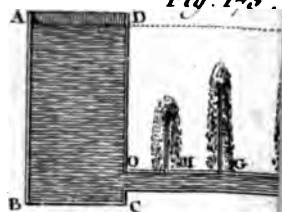


Fig. 173.

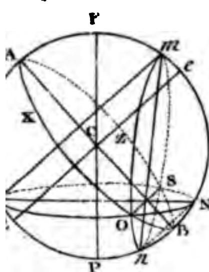
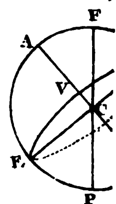


Fig. 1



Bea





